21世紀の科学技術リテラシー像～豊かに生きるための智～プロジェクト

# 数　理　科　学

## 専　門　部　会　報　告　書

平成20年（2008年）6月

Science
for All Japanese

http://www.science-for-all.jp/
科学技術の智プロジェクト

科学技術の智プロジェクト
研究代表者　北原和夫（国際基督教大学教養学部）
http://www.science-for-all.jp/

## 「科学技術の智」プロジェクト専門部会報告書の刊行にあたって

「科学技術の智」プロジェクト委員長
北原和夫

全ての日本人が身に付けてほしい科学技術の基礎的素養を明示しようというプロジェクトを開始したのは、2005 年であった。若者の理科離れが進んでいる現状にあって、2003 年に日本学術会議は「若者の理科離れ特別委員会」（後に「若者の科学力増進特別委員会」と改称）を組織し、その現状打開のために何をなすべきかについて検討を始めた。その結果、学校教育、社会教育を含む広い意味での教育のゴールを明示することが必要ではないか、との認識に到った。

そこで、米国における「Science for all Americans」の刊行(1989 年)に倣って、我が国においても、「Science for all Japanese」を策定する必要があると考え、2005 年度に科学技術振興調整費を得て、「科学技術リテラシー構築に向けた調査研究」を推進した。その成果を踏まえて、平成 18 年度（2006 年度）から、我が国の「科学技術の智」すなわち「成人段階を念頭において、全ての人々に身に付けてほしい科学・数学・技術に関係した知識・技能・物の見方」を実際に作成することを目的とした「日本人が身に付けるべき科学技術の基礎的素養に関する調査研究」（平成 18･19 年度科学技術振興調整費「重要政策課題への機動的対応の推進」）を発足させた。

全体として約 150 名の科学者、教育者、技術者、マスコミ関係者、また科学技術理解増進に従事する人々などが参加した。このプロジェクトの特徴は、学問の枠を超え、さらに、日本の科学技術の現状と歴史、伝統を踏まえて、科学者と教育学者等が協同で行うことであった。また、一般に公開しながら共に作っていくということを大切にし、ウェブサイトやシンポジウムを活用してできるだけ多くの人々が参画することによって、このプロジェクト自体が科学技術リテラシー向上の運動となることを目指した。

先ず全体像に取りかかる前に、現在の膨大な科学技術を七つの分野に分けて、それらに対応する専門部会を組織した。この七つの分野は、学問の体系に対応するのではなく、21 世紀を豊かに生きるための智として、関わりの強いところをまとめて一つの分野とした。また、近年急速に大きく広がって社会を変えつつある情報学の分野に対応して「情報学専門部会」を設置し、また、人類が存在する環境としての宇宙と地球に関わる分野について検討するために「宇宙・地球・環境科学専門部会」を設置した。また、人間の行動や社会の現象を科学の視点から考えるために「人間科学・社会科学専門部会」を設置した。物質に関わる分野について統合的に検討するために「物質科学専門部会」を設置した。数学の本質は、認識とコミュニケーションという人間の基本的精神活動にとって重要な知識と考え方であるという観点から、広く数理的な分野について検討するために「数理科学部会」を設置した。生物学から人間に関わる医学や保健までを含め、さらに生命倫理も含めて検討するために「生命科学専門部会」を

設置した。技術は、特に日本において近年は科学と強く相互作用しながら進展してきたのであり、またかつては、芸術と一体となって生活の中にあった。社会の在り方と関わる面を考慮した技術の在り方を明示するために「技術専門部会」を設置した。

このように、既存の学問あるいは教科の枠組みを超えた新たな智の領域の枠組みを、七つの専門部会の形で提案したのである。

この各専門部会には、多様な分野の科学者、教育学者、メディア、科学技術理解増進に関わる人々などが参加した。また、部会報告書の原稿が出来上がった段階で、部会間で相互閲読を行い、専門ではない分野の報告書の内容について理解できるように、相互に意見交換を行って、最終原稿をまとめる際の参考とした。

科学技術の智の全体像とその中の個々の知識の間の結びつきを明らかにする作業はまだ途上にあり、むしろその作業を今後とも国民的な協同作業として継続して行くことが、日本の「科学技術の智」を定着化し高めて行くために必要であると考えている。

この七部会報告書が、新たな科学技術理解増進運動の指針として、また、国民的な科学技術の議論と関心を喚起する材料として、多くの人々の手に届くことを願っている。

今後は、この報告書のさらなる改良と、科学技術の智の全体像への統合、さらに、定着化に向けた様々な教材と活動の企画を進めたい。是非、ともに科学技術の智の漲る社会を創成して行きましょう。

# まえがき

人類は経験と叡智によって文化を生み出し、またそれを継承し、発展させることによって、現在の繁栄を築いてきた。この長年にわたって培ってきた文化の恩恵を私たちは受けている。数学は文芸と並んでこのような文化の最も古いもののひとつである。

しかし「数学」という言葉を聞くと、「難しい」という形容詞を連想する人が少なくないようである。そして小学校で学んだ「算数」、特に数の計算は確かに日常使っているけれども、中学や高校で習った「数学」はもう自分と関係ない、と思っている成人が多い。残念なことに「知識人」と呼ばれる人達からさえもそのような声が聞かれる。

本報告は、数学が実に豊かな拡がりを持ってこの世界の中に存在していること、その多くが社会生活を含む私たちの身の回りの事柄に深く関係していること、そして数学が私たち人類にとって大きな意味を持っていると共に、その高度に見える部分も実はこうした身の回りにある数学と密接につながっていることをすべての日本人が具体的に理解してほしいと願って書かれた。

まず、算数の世界、すなわち数と図形について私たちが小学校で学んだ内容は実に豊かな世界を持っていて、まさにそれ自身巨大な文化遺産だということを言いたい。一例を挙げれば私たちは数の計算その他で、十進記数法の恩恵を日々被っている。私たちは、普段空気の存在を忘れているように、その恩恵の大きさを意識していない。

そして数学の研究とともに生まれてきた様々の抽象的概念や、論理的なものの考え方とその成果は、状況を的確に記述する言葉、効果的な問題の処理法として様々の場で用いられ、新たな文化を生み出した。その最も大きい場は工学を含む自然科学であるが､20 世紀後半以降社会科学から人文科学に至るあらゆる分野において数学の果たす役割はさらに飛躍的に拡大しつつある。

そこではもちろんより高度な数学が用いられるが、そのルーツは私たちが小中学校で学んだ算数・数学の中にある。ちょうど「不思議の国のアリス」で私たちのすぐ足下の草むらの中に全く別の世界への扉が隠れていたように。そうしたルーツを理解することは、現代文化の高みを知る手がかりになると共に、学校で学ぶ数学の世界の豊かさを知ることにもなろう。

しかも数学はそれを用いる専門家が知っていればいいものではない。現在私たちが日常生活の中でメディアの報道に接し、買い物その他の活動をし、さらに市民としての権利と責任とを持って行動する場合、私たちはそこで与えられる様々の説明の妥当性を判断しなければならない。そこでは統計をはじめとする数学が直接あるいは（科学的説明の根拠という形で）間接的に用いられている。私たちの多くは進んだ数学を自分から用いる必要は必ずしもないが、提示された内容の妥当性を判断できる程度の数理的な感覚・能力を成人として持っている必要がある。例えば、与えられた統計グラフが何を語っているか、あるいは語っていないかを適切に読み取ることは状況の理

解・判断においてきわめて重要である。

上に述べたことは、いわば文化としての数学と私たちとの関わりであるが、もう一つ数学の方法・考え方・表現法が持つ私たちの日常との関わりがある。すなわちものごとを論理的に考え、的確に表現することは、私たちがものを考え、また相互に意思疎通をはかっていく場合に最も基本的なことであるが、数学ではこれらがきわめて「純粋に」目に見える形で行われる。したがって数学を学ぶ中で私たちはこうした論理的な思考法や抽象的な概念を用いた表現法を身に付けていくことができる。

本報告では、日本の成人すべてが持っていてほしい「市民」の数学リテラシー像として、こうした広くて豊かな数学の世界をできるだけ分かりやすい形で提示しようと努めた。そのために内容としては小学校あるいは中学校で学ぶものから出発し、それらがどれだけ豊かなものを持っているか、それらがどのような進んだ数学につながっているか、様々の事柄、特に自然科学の世界と関係しているか、そして数学の考え方・表現法がどう通常の言語によるものの考え方・表現法と関連しているかをできるだけ具体的に述べていく。

したがって数学を自らの専門的活動で積極的に用いる人々を直接の対象とはしていないが、そうした人々にとってもここに述べる数学理解を持つことは有意義であろう。

この意図がどれだけ成功しているかは読者の厳正な判断に委ねなければならないが、少なくとも本報告はこうした試みのひとつとして提示したものであって、様々の健全な批判を仰ぎつつ今後一層よいものにしていく所存であることは明言しておきたい。

最後に、本専門部会が「数理科学」の名称を用いている点について一言しておきたい。日本で「数学」というといわゆる「純粋数学」のことと取られる傾向がある。そうした狭い意味に限定されない、開かれた数学の有り様を示す趣旨で、最近では「数理科学」の語が用いられるようになっており、本専門部会でもその名称を採用した。しかしそもそも印欧語での「数学」の語（英語 Mathematics）は「学ばれるべき（価値のある）もの」という意味のギリシャ語に由来し、「数理科学」の語はこの本来の意味への立ち返りとも考えられる。こうした事情をふまえ、本報告では伝統的な用語である「数学」の語を、ただし本来の広い意味で用いることとした。

# 要　約

「まえがき」で「数学リテラシー」像をまとめるに当たっての一般的な方針と概要を述べた。ここで本文において、それをどのように記述しているかを明らかにし、その内容を要約しておこう。次にある目次を併せて参照されたい。

まず第 1 章「数学とは」では、数学という「学問」がどのようなものであるかを（数学者の立場から）語る。数学認識の歴史的な発展をも考慮しつつ、その本質を以下の四つの命題にまとめてみた：

１．数学の基礎は数と図形である。

２．数学は抽象化した概念を論理によって体系化する。

３．数学は抽象と論理を重視する記述言語である。

４．数学は普遍的な構造（数理モデル）の学として諸科学に開かれている。

次に第 2 章・第 3 章で数学の世界がどのようなものであるかを記述する。ここが本書の主要部分である。

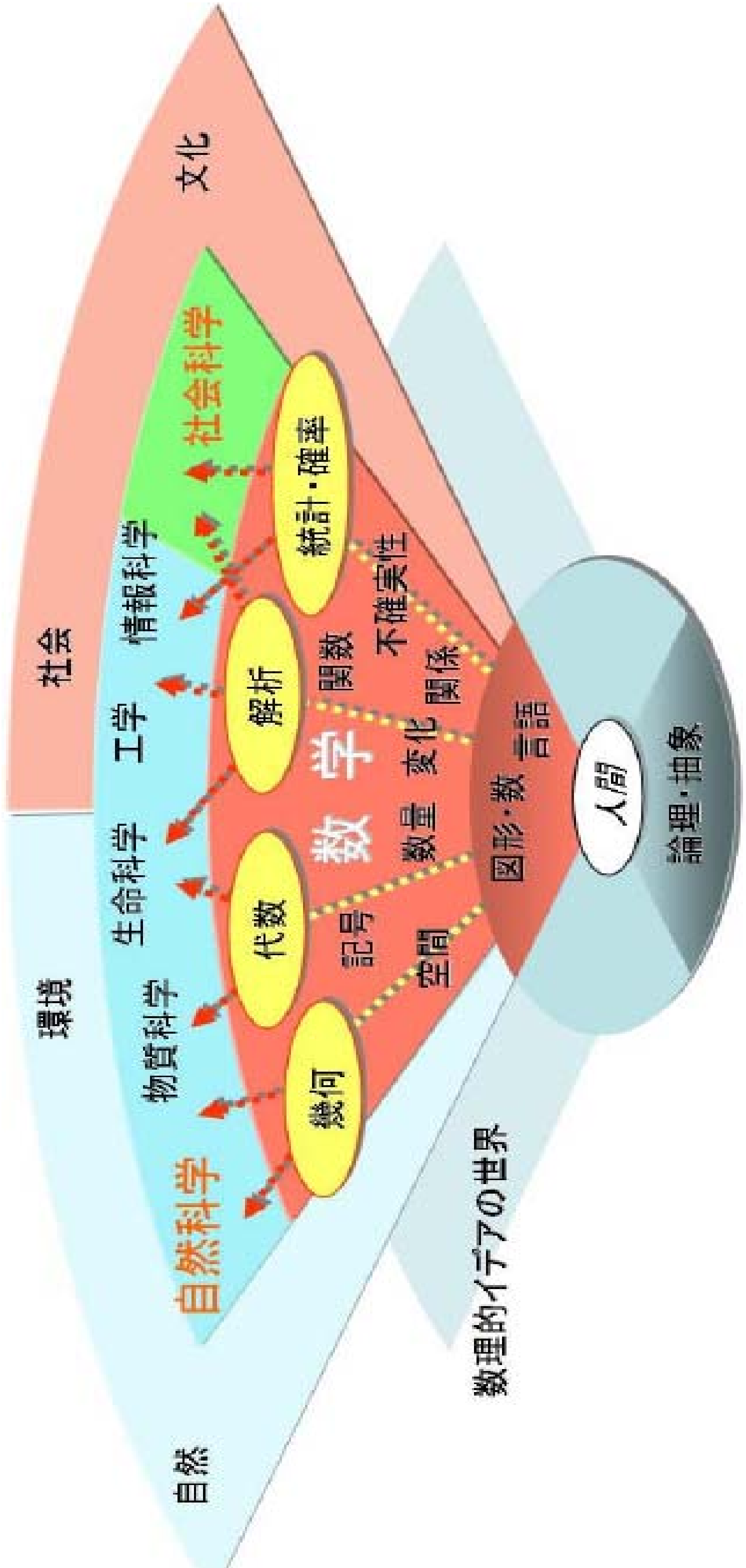
第 2 章では、数学の対象と主要概念について記す。言い換えると「数学」というめがねで現実を見るとどのように見えるかを述べる。内容は四つに分かれており、「数量」「図形」「変化と関係」「データと確からしさ」となっている。この分類は OECD・生徒の学習到達度調査（PISA）で用いられている評価観点「数学的リテラシー」における、四つの「主要概念」とほぼ一致する。

第 3 章では、数学の方法について記す。すなわち「数学」という言葉で考えるとはどういうことかを述べる。内容は大きく二つに分かれ、まず「数学言語」がどのようなものであるかについて説明する。次に数学を用いた問題解決のプロセスはどのようなものであるかを述べる。後者は本質的に「考える」ことであるので、哲学の方法とも深くつながっている。いわゆる「コンピテンシー」にあたる部分である。

第 4 章では、2・3 章が概括的な記述であるのを補うべく、幾つかの数学的に大事な話題を選んで、より具体的に述べる。また「日本語と数学」および「和算」という日本独自の話題を加えた。

第 5 章は、それまでの数学の側からの記述を逆転し、個人と数学とがどのように関わっているか、また数学が自然科学あるいは社会科学とどのように関わってきたかについて、歴史的な観点に立ちつつ現在の状況を含めて、まとめの意味で捉え直してみた。

# 数学リテラシー


文化
社会
環境
自然
社会科学
情報科学
工学
生命科学
物質科学
自然科学
統計・確率
解析
代数
幾何
数学
関数
不確実性
関係
変化
数量
記号
空間
図形・数
言語
人間
論理・抽象
数理的イデアの世界

# 目　次

# 第１章　数学とは

本章では「数学という『学問』がどのようなものであるか」を（数学者の立場から）語る。数学は古い学問であるが、その進歩と共に数学についての認識自身も時代とともに変わっている。ここではそうした数学認識の歴史的発展も考慮しつつ、数学の本質（nature）を幾つかの観点から（単純なものから発展的なものへと）並列的に述べることとする。

## 1.1　数学の基礎は数と図形である。

「数（number)」と「図形（figure)」は、「言葉（language)」とならんで人間が持つ代表的な抽象的認識であるが、数学はこれら数と図形（およびそれらを基に生まれた抽象的概念）を考察の対象にする。つまり他の自然科学と異なり、その対象は最初から抽象的なものであって、そこに数学の特色がある。

「数」はさまざまの「量」(quantity）を認識するものであり、一般的な（言葉によって表される)「質」(quality）と区別される。最も根本的な「数」は自然数であるが、自然の中で認識されるほとんどの量は連続量であり、これを私たちは単位、比の考え方を用いて「実数」として表すことを知っている[1]。現代の数学は、空間的な（多次元の）量をベクトルとして表現し、またこの「数」の概念を広げることにより、さらに広い範囲の「量」を考えることを可能にしている（複素数、有限体)。また数学は、単に静的な確定した量だけでなく、「変化」する量、「不確定性」を持った量も取り扱うことで、その世界をより豊かなものに発展させている（詳しくは「数学の世界」参照)。現実世界にあるこれほど多くの様々の概念が「量」として数を用いて表され、それらの関係として自然法則が記述されるというのは、考えてみれば、実に驚くべきことである。そして自然科学が数学を言葉として用いる第一の根拠はここにあるのである。

「図形」は「空間」(space）内にあるさまざまの「形」(shape）という特別な「質」を認識するものである。このとき数学が行うことは、形の持つ特定の特徴にのみ着目して、他の一切を捨象するという作業であり、数学に特有な抽象性、厳密性はここに由来する。またこれらの図形の性質間の関係を明らかにしていくことが重要で、そのために論理的な推論が用いられる。数学の持つ論理性、体系性もまたここに由来する。

実は図形は「長さ」「角度」など様々の量を持っており、図形の性質の多くはそれらの量を用いて記述されることから、図形の量的な性質を調べる（計量）ことが重要である。逆に、様々の量を座標・グラフなどを用いて視覚化することができる。こうした「数」と「図形」とのあいだの密接な相互関係が数学をきわめて豊かなものにしているのである。

[1] ユークリッドの『原論』においては、「長さ」「角度」等は絶対的な「量」として取り扱われている。当時は「無理数」の扱いが回避され、有理数だけを「数」としていた。

一方で、一筆書きできるかどうかなど、計量化されない図形独自の性質（位相的性質）の研究も進み、特に近年はグラフ理論などが応用をも含めて様々のところで用いられている。

## 1.2　数学は抽象化した概念を論理によって体系化する

数にせよ図形にせよ、それを扱うためには、現実の複雑なもの（complex）の中から、ある概念を抽象化（abstraction）し、その本質を明確化する（数学的に厳密に定義する）のが数学の基本的方法である。この考え方から、数学は、数や図形を出発点として、さらに抽象的な概念を創出してゆく。

その上で現実の持つ複雑性を回復するために、こうした諸概念を体系的（systematic）に結びつけてそれらの関係を明らかにし、一個の有機体（organism）として再構成する。その構築を支えるものが論理（logic）である[2]。

このようにして、数の演算の研究から代数学が、その変化の研究から解析学が、図形の研究から幾何学が生まれ、さらに確率論、数学基礎論などが数学の主要分野として生まれ発展して現在に至っている。

「抽象化」するということは、ある性質にのみ着目して、他のすべてを切り捨てることである。では、そうやって抽象化によって得られた概念が、貧しいものかというと、全くそうではない。「抽象化」とは単に既知の一群のものに共通な性質を取り出すことにとどまらない。むしろそれによって従来意識されていなかった、全く異なるものと新たに関連づけられ、それによってその概念自身が新たな豊かさ、広がりを獲得する、という事情がよく起こる[3]。抽象化の過程でこそ数学的な想像力が有効に働き、新たな概念を創り出し、あるいは新たな概念間の関係を見出すことができるのである。

## 1.3　数学は抽象と論理を重視する記述言語である

ところで概念を抽象化し、論理的に組み合わせる、というのは、実は（自然）言語の持っている働きでもある。人間の知識全体が体系的なのである。それは人間がものを考え（think）、人間同士が意思を通じ合う（communicate）ための基本前提である。

実際、数学は一種の「言語」なのである。ただし記述を主とする言語である。

数学では、一般的な数や図形を文字で表し、様々の記号（symbol）を用いた「数式」という文を書く[4]。定義などでは自然言語を使わざるを得ないが、それは最小限の「数学的に許容される言い方」にとどめ、また意味が曖昧にならないよう十分に注意する。

理論を記述するときの核となる部分は、演繹的推論と呼ばれる特別な「文法」に依

---

2　この辺の事情を[SfAA]では「数学はパターンと関係の科学である」と言い表している。また学問としての方法は哲学と本質的に通じるものを持っている。ただし哲学では自然言語を用いる。

3　ユークリッド幾何学における「直線」は、非ユークリッド幾何学の確立によって、「真っ直ぐな線」（測地線）として一般化され、例えば球の大円との類似性が明らかにされた。

4　この記述言語は万国共通(global)である。私たちは数式で「筆談」することができる。

拠することにより、一定の前提から結論を得るプロセス（証明）が、厳密な形で書かれる。この仕組み（論理）は自然言語でも同じであるが、数学では限られた特有の使い方をすることで、「（前提を承認する限り）反論の余地のない」ものとなる[5]。

数学において「正しい」とは、論理的に正しいことに他ならない。この点他の自然科学におけるように、何か新しい現象が発見されて、それまで「正しい」とされていたことが「誤り」になる、ということはない[6]。

しかしすべての論理の連鎖を書き下すことは効率的でないので、幾つかの「定理」「公式」「アルゴリズム」などのサブルーチンを用いて、記述や思考を効率化することになる。

こうした方法論は、基本的にユークリッドの『原論』で確立された。『原論』は当時得られていた数学理論全体を体系的に記述したものであるが、後世様々の学問的記述において重要な「規範」（model）とされた。

また具体的な数の代わりに文字を用いることで、数学言語は極めて大きな汎用性を獲得した。さらに十進記数法や文字式の導入により、様々の計算を一定のアルゴリズムに従って形式的に行うことが可能になり、著しい思考の効率化を実現した[7]。そしてコンピュータにこれを乗せることで、人類は人力計算をはるかに凌ぐ桁違いの能力を獲得している。

しかしここで特に強調しておきたいのは、「計算」もまたあくまで文章だという点である。数式、特に文字式は数学的に意味のある「文」であり、それらをアルゴリズムに従って操作することは、形式的であるにせよ、論理に従った推論を行っていることに他ならない。具体的な数の計算や文字式の形式的操作はコンピュータに敵わないが、よいアルゴリズムを考え出したり、計算の意味を考えることは人間でなければできない。

### 1.4　数学は普遍的な構造（数理モデル）の学として諸科学に開かれている

数学が言語であるとすれば、数学の理論（数理モデル）は文芸作品と比べられよう。数学が、自然言語の文芸作品と大きく異なるのは、その理論が普遍的で、それゆえ自然や社会を記述するモデルになることである。その有用性は、数学理論自身が強力なサブルーチンとして物事の理解、問題の解決に使えるところにある。つまりある現象が数学理論の要求する諸前提（ある種の基本的法則性）をみたすことが分かれば、その理論を数理モデルとして、その結果を用いることにより現象についての様々の帰結（より高度の法則性など）が直ちに得られる。代表例は力学における微分方程式の理

---

5　これはあくまで数学理論の記述には演繹的推論が必須とされる、と言っているのである。数学を理解したり、考え出したりするためには、直観・帰納的推論その他の精神的活動ももちろん用いられ、実際極めて有効である（cf.[3.2]）。

6　証明が不十分で、結論が必ずしも正しくないことが後で判明するということはありうる。

7　これは基本的にアラビア数学が成し遂げたことで、私たちはその基礎の上に立っている。さらにここで述べた意味での「数学言語」の最終的確立は 17 世紀ヨーロッパでのことである。

論である。文芸作品は個別独自性に価値があるが、数学理論はこうした普遍性にこそ価値がある。近代科学はこの普遍性あるがゆえに数学を自己の言語として採用し、またそうすることによって自らを確立した。

ただし、数学理論がいつも現象の解明に先だって存在するわけではなく、現象の解明への努力が数学理論を生み出すことも多く、その影響は双方向的である。それはニュートン力学の誕生と微分積分学の成立の経過に典型的である。数学もまた、近代科学の確立を契機として、自らの近代化を実現したのである。その後、数学と自然科学とは相互に強い影響を与えつつ、現在に至っている。

一方で、全く独自に数学の分野で想像力のみによって確立された理論が、あるとき自然の中にモデルとして現れたり、技術の分野で著しい応用があったりする。数学の理論と他の諸科学との関係は密接ではあるが同時に多様である（第５章参照）。

さらに上に述べたように、ユークリッドの『原論』の理論記述体系は、学問の、より広く言えば人間の知識体系を記述する「普遍的モデル」の役割を果たしてきたと言えよう[8]。

---

[8] それ故、ニュートンは自らの力学についての著書を『自然哲学の数学的原理』と名付け、ホワイトヘッド-ラッセルは彼らの数理論理学の著書を『数学の原理』と題した。

# 第２章　数学の世界A：数学の対象と主要概念

数学は抽象的であると言われる。確かに数学が扱う対象は抽象的なもので、そこに数学の特色もあるのだが、しかし一方でそれらは現実の世界にあることがらやその性質を抽象化したものである。したがって数学の諸概念が生まれてきた現実世界に立ち戻ってみることによって抽象的な概念をより身近に感じることができ、またそこから派生したより抽象的な概念をもよりよく理解することができる。

逆の見方をすれば、数学の概念や考え方を実際の例を挙げて説明することは、「数学」というめがねで見ると現実の世界がどのように見えるかを述べることでもある。「抽象化」することは、決してものごとを無味乾燥な味気ないものとしてしまうのではなく、むしろ普段何気なく通り過ぎていたところに鮮やかで豊かな世界があることを私たちに見せてくれるのである。

この第２章では、まず主な数学的対象とそれに関わる概念について説明する。すなわち数学の世界がどのようなものであるか、より正確に言えば数学の世界についてどのようなイメージを持ってほしいと私達が考えているかについて述べる。これに続く第３章では、数学の方法論、すなわち数学ではどのようにものごとを見、考えていくのかについて述べる。さらにこれら２章では包括的な記述を行っているため、個々の詳細には立ち入っていない点を補うべく、幾つかの大事なテーマについて第４章で個別に取り上げてより詳しく述べた。

本章では、数学的対象を数と量・図形と空間・変化と関係・データと確からしさの４つに大きく分けて述べている[9]。中でも最後の「データと確からしさ」については、他以上に詳細に描き込んである。これは従来の日本の算数・数学教育では、前３者についてはカリキュラムとして十分成熟したものが知られているのに対し、最後の主題、いわゆる確率・統計についてはともすれば周辺的なものとしてないがしろにされてきたが、近年のコンピュータの発達等によって、学問においても、社会生活においてもその重要度が増している、との認識に基づくものである。

## 2.1　数量

### 2.1.1　数と量

数と量　量（quantity）を表現するものが数[10]（number）であり、数によって表現されるものが量である。数は数学の世界の概念（concept）であり、量はその自然界における実現（realization）である。現代は計算器、あるいはコンピュータの発達によって、複雑な数の計算を手で行う必要は減少しているが、数と量との相互関係の認識、

[9] この分類は、PISA 調査で用いられた「数学リテラシー」における「主要なアイデア」でのそれ（[PISA2006]）とほぼ一致している。

[10] ここで「数」とは特に断らない限り（自然数、有理数を含んだ）「実数」を意味する。

計算の仕組みの理解、あるいは概数、近似などの数の感覚を持つことは変わらず、否従来にもまして重要である。

ある考察対象を量として認識する、すなわちその性質を数として表すことを「数量化する」（quantify）といい、数量化された性質を「定量的」（quantitative）性質と呼んで、（通常の）言葉で形容される「定性的」（qualitative）性質と区別する。より正確に言えば、定性的に表現されている性質を定量的に捉えることを「数量化する」と言う。そこでは「大きいー小さい」「強いー弱い」「重いー軽い」「濃いー薄い」「熱いー冷たい」など対になった様々の「度合い」を表す性質を「数」として表現することになる。多くの場合それが可能になるところで理論的にも技術的にもすでに重要な科学的契機がある。例えばものの重さを量る場合には、何らかの力学的原理・法則その他が使われる（cf.[5.3]）。

### 2.1.2　量の性質

数が数学という一つの世界の概念であるのに対し、量の場合には、それがどこの世界での数の実現であるかという「属性」を持っている。これを物理学では「次元」（dimension）とよぶ。

量には必ず基底量（“0”に対応する量）と単位量（“1”に対応する量）がある。もしその量に「加法性がある」（下記の外延量）ならば、逆にこれらを決めることによって、対応する「数」は当該量と基底状態との差と、単位量との比として一意的に決まる[11]。「位置」「時刻」などがそれに当たる。相対的な関係（差）だけが問題である場合には、前者も不要である。上の例を相対化すれば「長さ」「時間」がこれに当たる。後者および「面積」「体積」「重さ」などは「何もない状態」という（自然な）基底状態がある。こうした加法的な量は「外延量」とよばれている。これに対し「濃度」はそのまま加えることができず（10%の食塩水と 20%の食塩水とを加えて 30%にはならない）、二つの外延量（食塩水で言えば、食塩の質量と溶液の質量）の比として定義される。このような量を「内包量」という。多くの量は幾つかの基本的な外延量を掛けたり割ったりした形で定義される[12]。

単位系　したがって様々の量を数値化するには「単位」を定める必要がある。違う単位を用いる場合には数値を「換算」する必要がある。しかも量の間に関係があるから、単位はそれと両立する形で決められなければならない。例えば距離をメートルで測り、時間を秒で計れば、速さは メートル/秒（秒速○メートル）である。（物理学的な）量についてこのように相互に関連させた単位の集まりは「単位系」と呼ばれ、国際的にその基準が定められている（国際単位系）。これに対し、「角度」と「対数」の二つの数学的な量については、数学内部での単位（スケール）が必要になる。前者には度（360°で一周）とラジアン（$2\pi$で一周）があり、後者では常用対数（10

11　ユークリッドの『原論』では、有理数のみが「数」とされ、長さや角度は絶対的な「量」として独自に扱われて、「比」なども幾何学的に解釈された。

12　物理的な量としては、国際単位系（日本工業規格もこれに準拠）に挙げられている 7 種類（長さ、質量、時間、電流、温度、物質量、光度）が基本である。

を底）と自然対数（数$e$を底）が代表的である[13]。

離散と連続　量には、自然数（整数）に対応する離散的な（discrete）（「数える」）量と、実数に対応する連続的な（continuous）（「測る」）量とがある[14]。離散的な量には「次」があり、連続量にはそれがない。連続量を数として認識するのは、有理数による近似値の形を通してであることが多いが、他にも方程式の解などその性質による表し方があり得る。中でも重要なのは数直線を用いることで、それにより連続量は「長さ」（正確には「直線上の位置」）という特別の量として表される（後述）。

### 2.1.3　数の性質

自然数には、個数（濃度。一対一対応を基礎にする）と順序との2つの捉え方がある。どちらの意味で考えるかによって「2つ」「2番目」と呼び方が異なる。前者の意味で考えることが多い。数（自然数）を数えることは、言葉と同じくらい古いが、これを組織的に用い、計算し、記録するようになったのは経済が発達した古代文明の時代からである。

整数　自然数では加法・乗法が定義できるが、減法・（乗法の逆演算としての）除法は必ずしもできない。このうち減法が可能となるように負の数を加えることによって整数が定義される[15]。

数は「大きさ」の概念があることと、「計算」のできることとが2つの本質的な性質である。量を数によって表すときには、これらの性質が大事な役割を果たす。

加法・減法　同じ次元の量の多くではそれらを「加える」ことができる（外延量）[16]。この意味で加法は最も基本的な演算ということができる。加減法の基本性質は加群（可換群）の公理としてまとめられる。中でも結合法則、交換法則、（乗法との関係を示す）分配法則は基本的である[17]。

乗法・除法　代数系としては同じ可換群であっても、量として考えるとき加法と乗法は全く違う。加減法が同じ次元内での演算であるのに対し、乗法・除法は違う次元の量を掛けたり割ったりして、また新たな次元の量を作る（長さ×長さ＝面積、道のり（長さ）÷時間＝速度）。つまり乗法や除法はそれを繰り返すことでどんどん新たな世界を創っていくのである[18]。一方、同じ次元の量の比（ratio）をとること

---

13　$e$と$\pi$との重要性の本質はここにある（cf.[2.3.2]［3.4]）。

14　現在はそれぞれ「デジタル(digital)量」「アナログ(analogue)量」とよばれることも多い。

15　整数に乗法を拡張すること、特に$(-1)\times(-1)=1$は子どもたちにとってなかなか理解できないことである。これは量で考えるとき、乗法によって次元が変わってしまうことが大きい。

16　これに対し内包量は単純に加えることができないが、速度のように加法が考えられるものもある。

17　私たちはまず意識していないが、数や文字式の計算におけるアルゴリズムの正しさのほとんどはこれらに依拠している。

18　逆に、「数」は単位量との比を取っているから常に「無次元」であり、したがって掛け算をしても「同じ世界」に止まっている。この区別ができて（デカルトによる）初めて文字式の四則演算が可能になった。

で無次元の量（スカラー）が得られ、逆に 2 倍、3 倍というように無次元の量をかけて（スカラー倍）同じ次元の量を作ることもできる。

自然数（整数）の除法　自然数の中での（余りの出る）割り算は、除法の計算アルゴリズムの基礎として重要である。同時に、それらは約数・倍数などの数論的概念の基礎になり、「素数」の深い世界につながっていく。

順序　個数を含めた多くの量には順序、大小関係があって、対応する数の大小と両立している。その呼び方は量によって様々で、それが個々の量の性質を特徴付けている。例えば長さは「長い、短い」、面積は「広い、狭い」、重さは「重い、軽い」、温度は「熱い、冷たい」等々。逆に言えば、こうした様々の「度合い」を示す性質を抽象化したものが順序であり、その性質は共通しているのである[19]。それらは普通演算とも良い関係がある（順序体の公理）[20]。ただし角度、暦などでは「周期」の存在のため順序関係がない（一定の範囲では順序がある）。

### 2.1.4　数の表現・近似

命数法、十進法　人間は（通常）十進法を基礎とした命数法を用いて効率的に数（自然数）を言葉で表現することとした。日本では中国の合理的な命数法を用いてきたので、ヨーロッパ諸国のような複雑な数え方がなく、算数教育で余分な労力が不要である（cf.[4.2]）。

記数法　さらに 0 を導入することによって位取り記数法が可能になった。この記数法による四則演算（筆算）のアルゴリズムが容易に書けるなどの利点があり、私たちはそのおかげを蒙っている、人類の最大の発明のひとつである。日本ではアラビア数字による（位取り）記数法は明治期以降普及したが、すでにそれ以前に実質的に同値な位取り記数法であるそろばんによる数の表示が広く一般化していた。日本人の数感覚が世界的に見ても優れているのはこうした伝統の故である[21]。コンピュータの普及とともに二進法の重要さも増している（cf.[4.2]）。

実数の表現　連続量に対応する実数（特に無理数）を数学で一般的に表現するには「近似」を用いなければならない。近似数の表記法としては、小数と分数の 2 つがある。小数の四則演算は、位取り記数法を用いれば、整数のそれと全く同じアルゴリズムで実行できること、誤差評価が容易であることなどの利点がある。

有理数　整数の比の値として「有理数」（rational number）[22]の概念が得られるが、その表示方法に重点を置いて言う場合は「分数」と呼ばれる。分数は単位分数として捉える仕方もある。分数の四則演算が定義できるが、単位分数の立場では加減法が、

---

19　順序の公理：1. $a \le a$ ;2. $a \le b, b \le a \Rightarrow a = b$ ;3. $a \le b, b \le c \Rightarrow a \le c$

20　実数で「大小」を言う場合、数学では加法的な「多い少ない」と同じ意味に取るが、日常的には乗法的に絶対値の大きさの意味で用いることもあって混乱を起こす。少なからぬ子どもたちにとっては「-10 より 0.1 の方が小さい数」と感じられる。

21　しかし今はレジスターが釣り銭を自動計算するなどの理由から、日常的な暗算の機会は減り、こうした伝統も消えつつある。

22　元来の意味は「有比数」である。

比の値の立場では乗除法が自然に定義される。後者の立場に立つ加減法、前者の立場に立つ繁分数の乗除法はより理解が難しい。

近似（概数）　順序によって 2 つの量の「近さ」（絶対値）が定義できる。これによって、おおよその数に「丸める」こと（それで大きさのイメージをつかむことができ、計算が簡単になる）、欲しい誤差の中に収まるように近似することなどができる。近似の精確さ（accuracy）と扱いやすさとは二律背反になる。

有限小数は有理数である。逆に有理数は必ず有限小数かまたは無限循環小数として表される。無限小数はある実数を表し、任意の実数は有限小数または無限小数で表すことが可能である。

数直線（座標）・グラフ　数はまたその代表的な量である「長さ」に変換することによって、視覚的に表現される。私たちが長さを測る、つまり量を数に変えるときは「物差し」を使って測るのであり、この「物差し」の概念を（無限の長さの物差しとして）抽象化したものが「数直線」（1 次元座標）に他ならない。より正確に言えば、これは直線上の「位置」を数で表すので、それは原点（基底量）と単位の長さ（または 1 に対応する位置）とを決めることで、一意的に定まる。さらにこれを用いることによってあらゆる「量」を（数を通して）視覚化することができる。特に 2 つ（またはそれ以上）の量の関係を視覚化するものとしてのグラフ、図形を表すための（平面、立体）座標は様々の場で用いられる（cf.[3.1.5]）。

複素数　「数」（実数）の世界の一番自然な拡張は（$i^2 = -1$ という「数」$i$ を加えた）「複素数」の世界である。そこではあらゆる代数方程式がその中で解を持つという数学的に著しい性質がある（代数閉体）。自然界で複素数が直接的に見えるわけではないが、電磁気学、量子力学などの理論的枠組みに複素数を取り入れると理論が極めてすっきりしたものになる。

### 2.1.5　文字式

数の抽象化としての文字式　ある数に別の数を加える、というように様々の数について一度に考えるとき、この「ある数」「別の数」を文字によって、例えば $a$, $b$ を用いて $a+b$ と書く。このように書かれた式を「文字式」という。文字を「数を表すもの」として用い、幾つかの量を一度に表現して考えることができるのは、数学という言語の優れた特徴である（cf.[3.1.2]）。それによってきわめて一般的に問題を扱って解くことができ、しかも多くの場合にその答を求めるための一定の手順さえも書き下すことができるのである（アルゴリズム）。

多項式・分数式　文字式で、数の基本法則（結合、交換、分配）が成り立つと仮定すると、文字式を「標準的な」形に表すことができる。1 文字（と実数）から加減乗だけを繰り返して得られるのが多項式で、一般の場合（分数式）はその比として表せる。多項式は整数のように加減乗が定義でき、その比として表せる分数式では有理数と同様の仕方で四則演算ができる。

1 変数の多項式は整数と似た様々の性質を持っており、例えば余りのある割り算が定

義でき、したがって約数・倍数に当たる概念があって、素因数分解の一意性などが成り立つ[23]。

多項式や分数式で重要なのは、この変数の部分に数や別の式を「代入」（substitute）できることである。数を代入するとその結果として数が得られ、それは 1 つの「関数」を与えることになる。このようにして得られる関数を多項式関数あるいは分数関数とよぶ（cf.[2.3.2]）。

### 2.1.6　代数系

実数の中で、整数全体は加減乗の 3 つの演算に関しては閉じている（すなわち例えば 2 つの整数の和はまた整数となる)。多項式を含めた（１変数）分数式全体は実数と同様に四則演算ができ、またその中で多項式全体はやはり加減乗に関して閉じている。ここに現れる、加法や乗法のようにある対象（集合）の 2 つの要素に対して、第３の要素の対応の仕方が定まっているものを（２項）演算という。１つまたは複数の演算を持つ対象を一般に「代数系」とよぶ。これは数の演算の抽象化である。

上に挙げた例の他、ベクトル、行列など様々な代数系がある。やや変わったものとして、二つの集合 A, Bに対してその和 A∪Bあるいは共通部分A∩Bを取るという演算がある（Boole代数)。これは論理に現れる演算と深い関係がある。代数系では数の演算の性質（結合法則、交換法則など）の全部または一部、あるいはその変形などが成り立ち、代数系を特徴付けている。それらの代数系の性質と関係を研究するのが代数学である[24]。最初に挙げた、整数あるいは多項式全体は（可換）環と呼ばれる代数系である。

## 2.2　図形

### 2.2.1　空間と図形

図形　私たちは、３次元空間の中で生きており、その中で視覚的に様々のものを認識して、取り扱っている。その際視覚的対象の形を、類似性と差異とによって分別し、体系付ける。数学はそれらを、ある特徴（性質）だけに着目した、理想化された概念である「図形」（figure）として自らの中に取り込む。点、直線、平面、円、三角形、多角形、多面体といった私たちになじみ深い図形はいずれも現実にあるイメージを理想化したものである（まっすぐな線→直線、丸い形→円、等々）[25]。その概念の定義は、（少数の例外［無定義用語］を除き）数学的に明確なものとなってい

[23] 1 変数の多項式・分数式が理解できれば、多変数の多項式・分数式を考えるのは容易い。ただしそれらの数学的性質は大きく違ってくる。直線の世界と平面・立体の世界とが全く違うように。

[24] 現代の代数学はここに述べたように抽象的・一般的なものとなっているが、歴史的には、代数方程式を解く理論として代数学は生まれ、発展した。

[25] ユークリッドの『原論』にある「点」の「定義」、「位置だけあって大きさのないものである」は、点の本質をよく捉えた説明である。

る（例：円＝平面内の、ある点（中心）からの距離（半径）が一定である点の軌跡［集合］）。

空間・次元　私たちは自らの存在する空間を縦・横・奥行きの 3 つの方向を持つものとして捉えている。またこれらは一様で、どこまでも続いていると考えている。これを数学の概念としたものが 3 次元ユークリッド空間である。時間も同じように考えると併せて 4 次元になる。逆に、ある図形が平面内にあれば 2 次元、直線の中にあれば 1 次元、点は 0 次元と考える。このように図形の性質として、一番粗いものがその広がりの「次元（dimension）」である。私たちの空間は 3 次元なので、それ以上の次元の空間は「想像」するしかないが、数学は（幾何的なイメージによらず）、「座標」という媒介を通して空間を代数的なものに転換することにより、一般の次元の空間を考える（合理的な仕方で想像する）ことを可能にしている（cf.[3.2.2]）。

非ユークリッド空間　数学はユークリッド幾何学の公理を批判的に捉え直すことにより、私たちの身の回りにある（と考えている）空間とは別の空間上の幾何学で同じように豊かなものが存在することを見出した。当初それは「想像上の」ものと考えられていたが、実はこの世界の中でも目に見える形で存在することが分かった。例えば球面は別の 2 次元幾何学の「空間」になっている。それどころか、驚くべきことに私たちの住む時空の 4 次元空間はユークリッド的ではないことが理論付けられたのである（相対性理論）。

### 2.2.2　図形の性質・計量

図形の性質としては、2 つまたはそれ以上の図形の関係（相対的位置）が重要である（交わる、平行、接する等）。中でも同じ名前で呼ばれる 2 つの図形が、同じ形であるかどうか（相似）、形も大きさも同じであるかどうか（合同）が基本である。

計量　数学としての図形の性質の探究は、人類文明の発祥以来の現実の問題に根ざしている。それは「幾何学」の語源が「測地」という意味であることからも知られる。人々は、土地の様子を知り、地図を作り、また建築物などを造営するために図面を作り、図形の様々の性質を応用した。ここでは長さ、角度、面積などの様々の量が現れ、これらの量を用いて図形の性質が記述される。このように量を用いて表される図形の性質を「計量的（metrical）性質」とよぶ。例えば三角形の合同の条件「3 辺の長さがいずれも相等しい」、「2 辺とその挟角が相等しい」、「2 角と挟辺が相等しい」は計量的性質による特徴付けである。これに対し、計量によらない（純粋に）「幾何的な」性質は「位相的」（topological）性質と呼ばれる（後述）。

絶対幾何学・座標幾何学　ユークリッド幾何学では、計量的性質を数値化せず、そのまま（絶対的な）量として扱う（絶対幾何学）。これに対し、座標を通して数の世界に移して考えるのが「座標幾何学」である。現実の世界ではもちろん具体的な数値に置き換えることが必要であるが、数学は（具体的な数値の如何に依存しない）幾何的な量の間の関係や、それを用いた幾何的性質の特徴付けを与える。例えば三角形の形を知るには、すべての辺や角の大きさを知る必要はなく、上に記されたよ

うな（半分の）情報を得ればよい（他はそれらを用いて表される[26]）。さらに面積なども計算することができる。

移動　2つの図形が合同であるかどうかを検証するには、単に静止した（static）事物として見るのではなく、一方を「移動」して「重ね合わせる」という動的（dynamic）作業が必要になる。特に平行移動、回転、反転、拡大縮小といった特別な操作の重要性と性質は古くから知られた。実は平面幾何学では、すべての移動は平行移動、回転、反転を繰り返すことで得られる。現代はコンピュータの発達によって、こうした作業を単にイマジネーションだけではなく、目に見える形で容易に行えるようになっている。

拡大縮小（スケール変換）　同様に2つの図形が相似であることは、移動に加えて拡大縮小をも行って重ね合わせることで検証される。この拡大縮小の大きさは、例えば地図の縮尺として表される。2点間の距離はこの大きさに比例して変化するので、地図上の距離と縮尺を知れば、対応する2地点間の距離を知ることができる。また角度は拡大縮小でも不変である[27]。

射影　空間図形の現実的な取り扱いではもう1つ、（無限遠を含む）ある視点からの投影あるいは射影（projection）が重要である。立体図形が射影によってどんな平面図形に写されるか、あるいは空間内の平面図形がどんな平面図形に写されるかは、本格的な数学の問題であるが、私たちは視覚で3次元のものを2次元の機能で認識しており、そこではかなり高度な数学的問題を解いている。一方でこれが「錯覚」を生む原因にもなっている。射影の考え方は絵画で遠近感を持たせるための遠近図法（透視図法）などにも応用される。

対称性　図形の性質で特に重要なものとして、「対称性」（symmetry）がある。ある（平面）図形が対称性を持つとは、平行移動、回転あるいは反転によって自分自身に重なりうることである。一般に高い対称性を持つものほど特殊な（数学的に）「美しい」図形であるとされる。同じ辺数の多角形の中では正多角形が一番対称性が高く、また連続的な対称性を持つ図形は平面内では（平面自身を除けば）直線と円である（cf.[4.5]）。

### 2.2.3　図形の表現・幾何学

座標　幾何的な考察を数を用いて行うためには、「座標」の概念が欠かせない。これは高等学校で初めて学ぶものではあるが、考え方としては、1次元での（単位を決めた）「長さ」、3次元での「縦・横・高さ」といった呼び名で、幼いときからすでに感覚的には身に付けている[28]。また2次元的な座標はグラフを描く上で、実質的に小学校から使われている。札幌市の住所は例えば北10条西8などと表示されるが、これも平面座標で位置を表すやり方である。ただし厳密な意味での「座標」は

---

26　ただし具体的な数値を計算するには、「三角関数」や「平方根」などの値を知る必要があり、四則計算では済まない。

27　ただし角度が不変であるからといって相似変換になるとは限らない（共形変換）。

28　1次元の座標である数直線は小学校ですでに教えられている。

いわば空間全体に導入した「物差し」である。これによって空間の「位置」の情報が数で表される。いくつの数が必要かが、考えている空間の次元を表す。また球面座標も天体の位置を表す手段として古代から導入利用されている（天球は正確には半球）が、現在では地球上の位置を表すもの（経度・緯度）として用いられている。

高次元の空間　座標を用いることで私たちはいとも簡単に4次元以上の空間を考えることができる。考える次元の数だけの「数」の組を考え、それを「座標」として持つ点を考えればいいからである。こうして一般次元の「立方体」や「球」を考え、そこでの「幾何学」を展開することが可能である。座標は現実の世界を調べる手段となるだけではなく、無限次元の世界への扉も開いてくれるのである。

位相　幾何学では「量」によって表される計量的性質が基本であるが、これに依存しない幾何的な性質もある。例えば「くっついている―はなれている」。こうした性質は「位相的」(topological)性質とよばれ、それを明らかにすることは近代数学になって初めて意識化され実行された[29]。ここでは計量的な性質が捨象されるため、むしろ組み合わせ論的な(combinatorial)離散的性質が重要な役割を果たす。20 世紀になってからは例えばグラフ理論などが大きな進展を見せている。

理論体系の記述　図形についての概念、あるいは図形間の関係を表す概念の性質を理解し、その概念や性質相互の関係を理解するために、ユークリッドは幾つかの基本的命題（公理、公準）と数学的な定義から演繹的推論（証明）に基づいて体系的に理論を記述するという方法を確立し、これは数学的な認識およびその記述方法のモデルとなった。

図形には様々の不思議な性質があり、しかもそれらが一見関係のなさそうな、より基本的ことがらから、しばしば補助的な図形の助けを借りて一挙に説明されたりする。幾何学は、数学の中でも整数論と並んで、単に有用というだけではなく、最も古くから、最も多くの人々を魅了し続けてきた分野であると言えよう[30]。

## 2.3　変化と関係

2 つの量の間には様々の「関係」（relation）がある。特に時間との関係を「変化」（change）という。これらを抽象化して数学の世界の概念としたものが「関数」（function）である。

### 2.3.1　関数とその表現

関数　私たちが日常的、あるいは社会的にふれる量は、単独で存在することよりも、時間その他の状況によって様々に変化する場合が多い。このような量の変化、あるいは状況を表すパラメータ（1 個とは限らない）への依存の仕方を調べることは重要で、数学はそのための様々な言葉や手段を開発してきた。まずこの「変化する量」

---

29　「ケーニヒスベルクの 7 つの橋の問題」の解としてオイラーが一筆書きの問題を数学的に完全に解いている（1736）。

30　一方で最も多くの人々を苦しめてきた、との反論がありうる。その克服は教育者側の課題である。

のことを数学では「関数」と呼んでいる。すなわち1つまたは複数の数に依存してある数が定まる仕組み（対応）が与えられているときに、この仕組みのことを関数という。

変数　例えば場所と時間を決めればそこでの気温は定まる。場所を経度 $a$, 緯度 $b$ として数値化し、時刻を $t$、温度を $T$（これらも単位を決めて数値化する）とすれば、$T = T(t, a, b)$という関数が定まる。このとき $\{t, a, b\}$ を独立変数、$T$ を従属変数という。独立変数が1個として、これを $x$、従属変数を $y$、関数を $f$ で表して、この関係を $y = f(x)$ と書く。

写像　関数をさらに「抽象化」したものとして、集合から集合への「写像」(map)の概念がある。というと難しそうに聞こえるが、この方が（当然のことながら）普通で沢山ある。上の例との類似で言えば、場所を数値化せずに｛東京（のある決まった場所、以下同じ）、名古屋、大阪｝とリストを作って、時間は正午に決め、その時点での天気（晴れ、曇り、雨など）を考えることにすれば、これはもう関数ではなく（場所からなる集合から天気の種類の集合への）写像である。大事なのは、パラメータ側とそれに依存して変化する「もの」が何かがはっきりしていて、その依存の仕組みがきちんと定まっている（well-defined）ことである。

関数の表現法　関数は、対応の仕方が「定まっている」ことさえ分かっていればよく、具体的に明示されなくてもよい。つまり一般の関数というのは、ある入力に対して定まった出力があるという、一種のブラックボックスである[31]。それをどう記述してその性質を調べるかが数学の問題なのである。まず関数を記述する方法として代表的なものは、表、グラフ、数式の3種類があってそれぞれに特徴を持ち、考えている問題に応じて、適当な手段を取る必要がある。

表　変数値に対して関数の値を対応させて一覧表にするのは最も素朴で一般的な表し方である。グラフを描くためにも普通はまず表を作らなければならない。しかし連続量に対してはすべての値を書くわけにはゆかないし、数字だけでは細かい性質まではなかなか見えないという限界がある。

グラフ　グラフを用いて関数を表示する方法によれば、変化の様子、つまり関数の性質は一目で分かる。ただ作成はかなり大変なのが普通であり（特に変域や値の範囲の取り方に工夫が必要である）、また細かい変化の様子までは分からない。さらに（これが本質的であるが）変化の性質は読み取れても、なぜそうなるかの説明はできない。

---

[31] 歴史的には、当初式の形で明示されたものしか「関数」と見なされなかった。このように一般的な数の対応として関数を捉えたのはディリクレである。

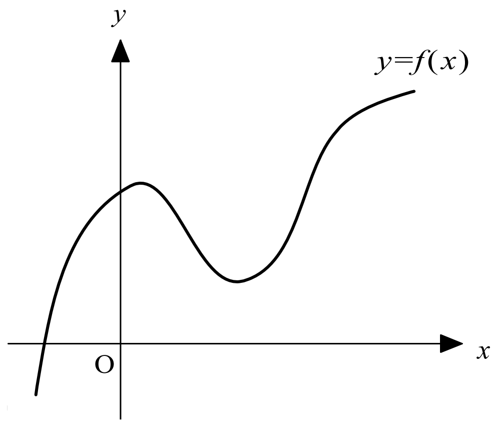



**図１　グラフ**

数式による表示　関数を表す最も「正確な」方法は（代表的な関数を含めて）数式を使って表すことであり、多くの性質もそれから導くことができる。したがって問題を解くために関数を調べるには、まずそのいくつかの特徴を明らかにして、それを用いて具体的に数式で書くことを目指す。しかしながら実際の問題で、これが可能となるのは僥倖といってよく、そこまでできないのが普通である。そこで近似的な関数を求めたり、あるいは性質だけを独立に調べることになる。同時にそうして「分かっている」関数の範囲をだんだん広げていくのである。

### 2.3.2　代表的な関数

数学は、そうした変化（関数）の最も基本的なものとして、正比例（または１次関数）、反比例、多項式的変化（特に２次変化）、指数的変化、対数的変化、周期的変化など（とその組み合わせ）を考える。これらが現実の世界の様々の場に現れること、その変化の型（一定量の乗法的あるいは加法的増加に従って値がどう変化するか）の特徴を知ることがまず基本である。

正比例と反比例　３種類の量 $a, b, c$ の関係では $ab = c$ という乗法的関係が最も基本である[32]。このうち $a$ または $b$ を一定に保てば正比例、$c$ を一定に保てば反比例の関係が得られる。正比例は加法を保つ（$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$）という著しい性質がある（線型性）。例えば、道のり＝速度×時間である。速度が一定（等速度運動）であれば、進む距離は時間に比例する。ある地点から別の地点に移ることを考えれば、進む速度と所要時間は反比例する。あるいは品物を買う合計金額＝単価×個数も日常的によく使われる。正比例に近い関数は１次関数 $y = ax+b$ である。例としては上で道のりの基準点を出発点以外のところに置いた場合に当たる。１次関数は独立変数の一定量の増加には一定量の値の変化があることで特徴付けられる[33]。また幾何学的には関数のグラフが（水平でない）直線となっていることでも

32　$a+b=c$ は同じ量であることから来る自明な関係として考慮しない。
33　厳密には連続性が必要。以下も一々断らないが、数学的に必要な滑らかさを仮定する。

特徴付けられる。

正比例（あるいは1次式）で表せない最も簡単な変化は２次多項式で表せるもの（２次関数)、あるいはその一般化として、多項式関数、有理関数で表せる変化がある。これらをまとめて代数的な変化とよぶ。その代表的な例としては等加速度運動（自由落下など）がある。すなわち1次元的な位置で考えて、時刻0での位置を $c$、 時刻0での速度を $v$、 加速度を $a$ とすれば、時刻 $t$ での位置は $\frac{1}{2}at^2+vt+c$ と表すことができる。

指数関数　1次関数と似ているが、一定量の増加があると一定倍される形の変化がある。典型的には預金を複利で増やしたときの元利合計がそれに当たる（単利の場合が1次関数)。元金を $A$、 利率を $p$、 期間を $t$ とすれば、元利合計は $B=A(1+p)^t$ となる。この場合、期間は飛び飛びの値であるが、これを実数全体に拡張することができて（「補間する」という）一般に指数関数（の定数倍） $y=Aa^x$ が得られる。特に $A=1$ の場合（$y=a^x$）には、加法が乗法に変わる（$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$ 指数法則）という著しい性質があり、これが厳密な意味での指数関数である。すなわち指数関数は実数全体からなる加法の世界を正の実数全体からなる乗法の世界に結び付けていることになる。指数関数のもう1つの著しい性質は（$a>1$ のとき）値の増大が著しいことである（ねずみ算)。複利が単利よりも有利なことは知られているが、単に利息が多いだけではなくて、期間が長くなればどんどん有利になる。さらに利率がどんなに低くても、0でさえなければいつかは必ず単利のどんな利息よりも多くなる。

対数関数　例えば十進法で自然数を表したときに「桁数」はもとの数が10倍になると1増える。つまり上と逆に一定倍するとその値は一定だけ増える（あるいは減る）という関係になっている。これも飛び飛びの値であるが、同じようにこの関数を実数全体に拡張することができて、対数関数と呼ばれ、$a$ 倍すると1増える対数関数を $y=\log_a x$ と書く（1に対する値は0とする)。これは乗法が加法に変わるという性質（$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$）があり、逆に乗法の世界を加法の世界に写す。したがって私たちは指数関数と対数関数を用いて加法の世界と乗法の世界とを行き来できる。こう書くといかにも抽象的数学の世界のように思われるが、実は私たち生物は普通外界の刺激の強さなどを対数関数で変換して感じ取っている（ウェーバー・フェヒナーの法則)。例えば音の高さは振動数が2倍になると1オクターブ高い音として認識される。

三角関数（円関数）　もう1つの典型的な変化の型は「周期的な」変化である。昼と夜、あるいは春夏秋冬など様々の周期的な変化が私たちの身の回りにある。それらは時間（何時何分）あるいは月日、昼（または夜）の時間の長さなどの形で数量化される。その典型的なものは波の高さの動きである。あるいは回転する円板の上に置いた点の位置変化といってもよい。正確には原点中心の単位円上で時刻 0 で(1, 0) にあった点が等速（速さ1）回転したときの時刻 $t$ の位置が（$\cos t$,　$\sin t$）と表

され、それぞれ余弦関数、正弦関数と呼ばれる。両者は時刻を π/2 だけずらせば重なる（$\sin(t+\frac{\pi}{2})=\cos t$）ので、本質的に同じ関数である。これらは普通三角比から定義されるが、関数としてはこのように見るのが自然である。これらの関数は実数全体の加法の世界を円周上の回転の世界に写していることになる。

上に挙げた関数達はその性質もまた値も（特別な場合の値、一般の場合の値の計算方法）よく分かっているので、これらの関数を用いて表される関数は基本的に「分かった」と考えることができ、実際様々の方法でその性質を調べることができる。この一群の関数は「初等関数」（elementary functions）と呼ばれてひとつのまとまった宇宙を形作っている。この宇宙の先に続く形で実は様々のおもしろい性質を持った関数の存在が知られ、用いられている。例えば三角関数のもう 1 つ彼方には楕円関数という数学的にきわめて深い内容を持った関数がある。

### 2.3.3　関数の性質を調べる

関数については、その変化の様子を関数の形、グラフその他から読み取り、現実の問題でどのような意味があるかを考えることが大切である。そうした変化の性質としては増加、減少に始まり、急に増加する、発散する（爆発する）、ある値に漸近していく、周期的に繰り返す、ある場所で特定の値を取る（例えば 0 になる）など様々のものが挙げられる。

正比例　変化の基本は正比例 $y = ax$ である。この比例定数 $a$ が正であれば関数は $x$ の増大と共に増加し、負であれば減少する。0 であれば一定で変化しない。また $a$ の絶対値が大きいほどその変化の度合いは大きい。グラフで見ると、この関数のグラフは（原点を通る）直線であるが、比例定数はその傾きになっている。

微分　局所的な関数の挙動を調べる有力な方法として、微分法がある。これは（数値）関数としては瞬間的な変化率（微分係数）$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を見るものである。関数 $f(x)$を考える点 $a$ の近くで 1 次関数 $f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$ として近似すると言い換えることもできる。SF 的に言うと、どんどん自分を小さくしてミクロの世界にゆくとその関数のグラフが直線になってしまうのである。幾何的にはグラフの接線の傾きとして理解される（ミクロの世界で「見える」直線が接線に他ならない）。もちろん微分係数は存在するとは限らない。それどころか存在しない方が普通であるが、先に述べてきたような「標準的な」関数では微分係数が存在する。そのような関数 $y=f(x)$ は微分可能であるといい、各点でその微分係数を対応させることで得られる新しい関数 $f'(x)$ を $f$ の導関数という。この導関数を用いてもとの関数 $f$ の変化を調べるのである。例えば導関数がある範囲で正であれば、そこで関数は増大し続ける。またその導関数の値が大きいほどその増大度も大きい。この導関数の導関数を考えることで、さらに詳しい変化の様子を知ることができる。特に図形では、曲線や曲面の「曲がり具合」などをこうして調べることができる。

さらに微分を知って元の関数を求めることを「積分する」(integrate) という。ミクロの世界での様子を調べるので微分積分学は「無限小解析学」(infinitesimal analysis) とも呼ばれる。

速度と加速度　微分積分学は力学との関連で研究確立された。運動、すなわち時間を変数とする位置の関数を考えるとき、微分係数はその時点での（瞬間）速度に他ならない。すなわち速度計は導関数を測っている[34]。この速度の導関数（すなわち２次導関数）が加速度である。ニュートン力学の基本法則は質量と加速度の積が力に等しい $ma = f$ というものである。したがってもとの位置の関数は２階微分方程式（運動方程式）の解として表されることになる。

関数そのものがすぐ数式で書けないとしても、その性質から例えば運動方程式のように微分方程式の解として関数が記述できる場合がある。このときそれを数学的に解いて解がよく知られた関数を用いて書ける場合もあるが、たとえ陽に解けなくとも、その解の関数の様々な性質を微分方程式としての性質から導くことが可能である。さらに近年はコンピュータの発達により、数値的に近似計算で解を求め、あるいは微分方程式さえ知られていなくともシミュレーションなどでその関数の性質を調べるという方法が広く行われるようになっている。こうした様々の関数の性質を調べ、それを応用する数学の分野が解析学である。上で微分を用いて曲線の性質が分かると述べたが、計量的な幾何的性質を調べるのに解析を用いることができる。これが微分幾何学と呼ばれる分野である。不思議なことに飛び飛びの値しか取らない整数の性質を調べるのにさえ、解析学が有効である（解析的整数論。cf.[4.4]）。

## 2.4　データと確からしさ

### 2.4.1　数学の対象としてのデータと確からしさ

現実社会で登場する「数」は、観測（あるいは測定や調査）を通して得られるものが多い。これらは、１） 複数の数が集まりとして利用あるいは認識される；２） それぞれの数に（量としての）属性情報が付随している、という特徴をもっており、一般にはひとまとめとして「データ」(data) と呼ばれている。データの中の個々の数は、「数値」(numerical value)、「観測値」(observed value) あるいは「測定値」(measurement) などと呼ばれることが多い。

定義の形式で言うと、「データとは、それから他の情報が導ける事実のことで、数あるいは文字の形をとっていて、コンピュータに入れることができるもの」である。データの主要部分が数値の集まりなので、それについてのいろいろな検討・吟味の課題は数学の問題になる。データが数学の対象になるのはそのためである。

データが 50 個の数値からなっているとき、日本では「データの数は 50 である」と言う。英語ではこの個数を“data size”という。データを扱うことが学問の主要部分

34 これは速度計が微分計算をしているわけではなく、（回転）速度に比例した電圧の電気が生じるといった物理現象を利用しているのである。

である統計学では、これを考慮して、データに含まれている数値の個数を「データの大きさ」と言う。ところがこの言い方は日常用語としての日本語になじまない。データの大きさというと、たとえば 173cm というようなデータ内の数値の大きさを連想するからである。そこで動物実験の現場などでは、これを「*n* 数」（エヌすう）と呼んでいる。データの大きさを変数記号で表すときに、*n* という記号を使うからである。

A 高校を卒業している 20 歳の大学生 B にとって、「私は A 高校を卒業した」ことは確かなことであり、「2 年後に私は死んでいる」ことは不確かなことである。不確かなことには程度が考えられる。その程度のことを「確からしさ」（certainty）あるいは「不確かさ」（uncertainty）という。確からしさと不確かさの関係は、近さと遠さの関係と同様、同じことの表と裏の関係である。

確からしさは、「万が一にも起こりえない」とか、「明日雨が降ることの確からしさは 30%である」というように、0 と 1 の間の数値で表現されることが多い。この表現では値が大きいことが確かなことを意味している。確からしさを数値で表すと、それについてのいろいろな検討・吟味課題は数学の問題になる。確からしさが数学の対象になるのはそのためである。

未来において不確かなことを考えるときは、確からしさという言い方より、起こりやすさという言い方の方が自然である。実際、「このサイコロを転がしたら偶数が出るか」ということを、日常会話の中で「偶数が出ることは確かだろうか」と表現することはない。しかし、サイコロを振って壺の中に伏せて偶数が出ているかどうかを問題にするときには、偶数の起こりやすさという言い方ができない。過去のことだからである。こういうときは偶数が出ていることの確からしさ、という言い方が適切になる。数学的には未来のことも過去のことも同じなので、数学では過去未来を合わせて「確からしさ」という表現を使う。

### 2.4.2　データの縮約と表示

データの基本部分は、たとえば 1 クラスの個々人の身長というように、変数（あるいは標識）を観測した数値の集まりである。その全体像は、数値を個々に見ているだけでは把握できない。データには、それを単純化して全体像を把握する手段が必要である。

単純化の第一歩は、例えば身長を 5cm 区間に区分けして、各区分に入る数値の個数すなわち「度数」（frequency）を示すことである。このようにデータの全体を度数で表現したものをデータの「度数分布」（frequency distribution）という。度数を *n* 数で割ると、度数分布の割合による表現が得られる。これをデータの「分布」あるいは「相対度数分布」という。

データの分布は、どれくらいの数値が何個あるかを把握するのには便利であるが、ある値以上の数値がどれくらいあるかを把握するのには不便である。このようなときには分布を値の小さい方から累積した「累積分布」（cumulative distribution）が便利である。

分布よりもっと単純にデータのおおよその様子を把握するには、少数の数値を用いるのがよい。その数値を得るための計算の規則・関数 (function) 、あるいはその計算結果を、分布の「代表値」(characteristics) あるいは「要約統計量」(summary statistics) という。

1 種類のデータに対してどのような代表値が適切かは、データの性質によって異なるが、代表値が代表値であるゆえんは全体像をできるだけ単純に把握することであるから、あまり複雑ではない「有効数字が 3 桁の 3 個の数値」くらいのものが適切である。

たとえば 465,326 人の体重データに対しては、「約 46 万 5 千人について体重を測ったところ、平均は 62.5kg、標準偏差は 4.8kg であった」ということで概要が把握できる。データを $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と書いたとき、平均 $m$, 標準偏差 $s$ は次式で定義される量である。

$$m = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1}[(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \cdots + (x_n - m)^2]}$$

また、有効数字は、0 でない数字が出てからの数値の桁数であり、筆頭数字が 1 の場合は有効数字 3 桁というときでも 4 桁を使うのが普通である。代表値としては、標準偏差の代わりにその二乗である分散を用いてもよい。

例えば給与を企業内で調べると、データの分布が左右対称でなく、値の大きい人が少ないのが普通である。このようにデータの分布が歪んでいるときは、平均と標準偏差ではなく、中央値と四分範囲を用いるのがよい。これらは 1、2 個の極端に他から離れている値、すなわち 外れ値 (outlier) の影響を受けにくいという特徴を持っている。

1 つのデータを他のデータと比べるときには、このように少数の外れ値の影響が小さいものを代表値として用いる方がよい。外れ値は、ときに、計算ミス、転記ミス、実験の失敗、というように、考えている対象の状態と異なる情報を与えることが稀でないからである。

数値の個数が 10 個以下のときは、平均と範囲(=最大値−最小値)を代表値にするのがよい。外れ値がなければ「範囲÷$n$ 数の平方根」が標準偏差の良い近似値になっているし、値の分布の幅が正確に把握できるからである。

どのような分布にはどのような代表値が良いか、ということについてのある程度の素養があると、会社間の給与比較、国際間の学力比較などで、無益な意見相違を減らすことができる。

度数分布や代表値は、データを数値として単純化したものである。これにたいして図形を用いた単純化は、数値より直感的認識に役に立つ。

例えばどのような代表値を用いるのが良いか検討するときには、柱状図(ヒストグラム)が有用である。これは、数値の区分を横軸、度数を縦軸にして度数分布を図にしたものである。適切に区分を設定したヒストグラムは、データの分布の位置と歪みを見出すのに役立つ道具である。

同じ変数の観測データが複数あって、その比較をしたいが、データサイズが 20 という程度に小さいというときは、箱ひげ図（box-whisker plot）を並列的に描くことが有用である。

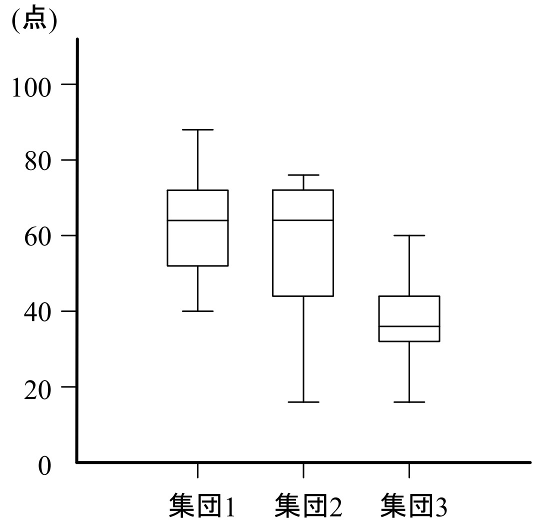



**図 2　箱ひげ図**

これらの他に、棒グラフ、帯グラフ、円グラフ、レーダー図、折れ線グラフなどをうまく使い分ければ、関連や推移が直観的に把握できる。これらの図の作り方と見方は社会常識として必須である（cf.[3.1.6]）。

図表現は基本的に 2 次元（あるいは 3 次元）の表示である。作り方について心得るべきことは、図に登場する 2 つあるいは 3 つの変数の名前、単位、物理的意味を、図中あるいはその周辺に書き込んで明示することである。図を見る場合もそれに着目することを常識とすべきである。

図表示は、直観に理解を委ねるものであるが故に、錯覚を起こさせやすいという特徴がある。例えば、ある値以下を切り落としたグラフで時間推移が表示されると、時間的変化が拡大して印象づけられるのが普通である。この種の錯覚・誤用についての心得は 1 つの要点である。

データは観測という操作で入手される。その最初のものを「生（ナマ）データ」( raw data) あるいは原データという。

現実に得られる生データには測定や観測の手段に応じて物理的単位がついている。例えば、ある被験物質がどれくらいの細胞毒性を持つかを試験管内（in vitro assay）で測定するときは、生存細胞に色を付ける物質を入れ、色の濃さを測る。その場合の生データは、「吸光度（optical density; OD）」という単位の測定値になる。

例えばある病気での死亡が、年齢によってどれくらい変わるかを検討するときは、各年齢層での死亡数をその層での人口で割った死亡率を用いる。このように、生デー

タを別の数値に換算することを一般に「変数変換」（variable transformation）という。

変数変換で最も単純なのは、きまった関数を用いて 1 つの数値を他の数値に変えるものである。例えば、20 回の脈拍を得る秒数 $t$ を測って、$(60/t) \times 20$ を計算すると、1 分あたりの脈拍数が得られる。この場合生データは $t$ の値であるが、実際に使われるのは変換値である。

近年の測定機器では、変換を機器内部で行って、求めたい単位での数値を生データとして出力するものが少なくない。このようなデータを扱うときに注意しなければならないのは、有効数字がどれだけか、である。見かけ上は 10 桁にもなっている測定値の精度が、実はきわめて悪い、ということがあり得る。例えば、遺伝子に突然変異を起こした細胞の数を細胞培養地の面積で割って突然変異率を計算すると、変異数が 3 個なのに、それを 8450 という面積で割って 0.00035503 という半端な数が出力されたりする。みかけは有効数字 4 桁であるが、実際は 1 桁である。

物理的な単位系を超えてデータの情報を利用するための変換に、「標準化」（standardization）と呼ばれるものがある。例えば、1,000 人の成人男性の身長、体重、血圧、腹囲などを測ってそれらの 1 次式で脳血管疾患の危険度を表現しようとする場合、物理的単位系の影響を避けるために、それぞれの変数ごとに平均を引いて標準偏差で割ったものを用いることが多い。分散・共分散行列ではなく、相関行列に基づく多変量解析である。このように生データが持つ物理的な単位系の影響を減らすことは、データを数学的に取り扱うための 1 つの工夫である。

データが集団を構成する個々人に対応している場合、集団内での個人の相対的位置を示すために、生データを順位に置き換えることが行われる。この変換を「順位変換」という。順位変換は、データ全体をまとめて変換するものであり、データ内の他の数値によって、変換結果として得られる値が異なるという特徴がある。

### 2.4.3　データに含まれる不確かさ

数学の理論が対象としている「数」は不確かさのない、すべての人間に共通な意味を持つ存在である。これに対してデータを構成する数値は、データを利用するという面で不確かさを伴った存在である。

例えば「ある人の体重」は体重計で観測すると数値になる。この数値は、食事の直後では大きな値になり、排泄の直後では小さな値になる。これは日常生活の中で数として扱われている体重が、データとしては不確かであることの例である。

このように不確かさがある場合でも、それらがおおよそ 60 kg の上下にあるときには、数値が観測条件で変わることを無視して、この人の体重は 60 kg であるとして差し支えない。データというものは不確かさを認めた上で、それを無視して利用するのが現実的である。

このような現実的なデータ利用の有用性を数学的に扱うために導入された概念に「誤差」（error）がある。定義という形式でいうと、「観測値に真の値が考えられるとき、真の値と観測値の差が誤差」である。体重の例で分かるように、この場合の「真

の値」（true value）はモデルの世界でのみ存在する定数である。当然、誤差もモデルの世界で考えられるものであり、一般には、その値を正確に知ること、測定すること、予想すること、制御することができない。それにも関わらずこの概念を用いるのは、この概念を用いることで、データの活用が数学的に理論化できるためである。

数学の理論で対象となる「変化」と「関係」では、関数とそれに伴う導関数や原始関数が主要な対象となる。データにおける変化と関係には、これと違った側面が存在している。

例えば、人の身長 $x$ と体重 $y$ との関係を考えてみよう。もし体型が同じであれば、体重は身長の 3 乗にほぼ比例すると考えられる。現実には、いろいろな体型の人がいるから、$x$ と $y$ の関係はこのような単純なものでなく、多くの人で測定したデータを $x$-$y$ 平面にプロットすると 2 次式曲線の上下に点が散らばっている。$x$ をメートル、$y$ をキログラムで表すと、中心的関係は $y = 22\,x^2$ くらいである。この曲線より上の人は太った人、下の人はやせた人と考えられるので、$y/x^2$ を肥満度の指標（body mass index; BMI）にすることが健康科学の分野で行われている。このような場合、中心的関係を表す式を「回帰式」（regression formula）という。

概ね 25 歳から 50 歳くらいまでの年齢層のサラリーマンで、年齢と年収を調べると、ほとんどの場合、年齢の高い者が大きな年収を受け取っている、という傾向が見られる。しかしこれは年齢と年収に回帰式が成り立つというものではない。この年齢と年収のように、ある変数と他の変数の間に、一方が大きいときには他方も大きく、一方が小さいときは他方も小さい、という傾向があるとき、この 2 つの変数には、正の「相関」（correlation）あるいは「関連」（association）があるという。逆に一方が大きいとき他方が小さくなる、というときは、負の相関あるいは負の関連があるという。

会社間の給料水準の比較には、会社内の年齢構成の違いを考慮に入れることが必要である。このようなとき、年収のような変数を「主変量」（primary variable）、年齢のような関連変数を「共変量」（covariate）という。何を主変量とし何を共変量とするかは、データを利用する目的と状況による。相関関係の指標としては「相関係数」（correlation coefficient）が標準的に使われている。

因果関係があれば一般には回帰関係や相関関係がデータに表れるが、相関関係が見られたからといって、これを因果関係と見るのは正しくない。例えば中学校であれば、英語、国語、数学の成績の間に正の相関が見られる。これは一つの科目での成績の良さが原因となって他の科目の成績が良くなっているという関係ではない。生徒の論理的知的能力がそれぞれの科目に同じように現れる結果として生じる相関関係である。

相関関係が別の共変量の影響と混じって見分けがつかなくなることがある。例えば、大学の入学試験の合格者だけで見ると英語の成績と数学の成績に負の相関が見られる。これは、点数の和で合否を決めているからである。この場合は、合格のとき値が 1、不合格のとき値が 0 となる合否を表す共変量が影響しているためである。このような現象を共変量の「交絡」（confounding）という。前述の例における身長と年齢は、それぞれ体重や給与に交絡している共変量である。

共変量による交絡が考えられるときは、共変量の影響を調整してデータを利用すべきである。例えば、胃ガンの 5 年生存率を癌研究会のデータベースで調べると、10 年に 10%の割で良くなっているが、これをそのまま胃ガン治療法の進歩だと考えてはいけない。近年の方が、重症度が軽い胃ガン患者が多くなっていることが影響しているからで、治療法の進歩を評価するときは、重症度という共変量の影響を調整しなければならない。

新聞やテレビでは、視聴率 15.7%とか、政党支持率 42.1%といった調査データが頻繁に登場する。このデータは、テレビを見ている日本人全員、あるいは日本の有権者全員を調べた結果ではなく、たかだか 600 世帯、あるいは数千人の有権者を調べた結果に過ぎない。すなわちこれらの数値は、対象となっている集団（母集団 population）の一部（標本 sample）についての数値であり、本当に知りたい母集団全体での数値ではない。そういう意味で、これらのデータは不確かな数値である。母集団での視聴率などを真の値とすると、標本での値には誤差が含まれる。この誤差を「標本誤差」（sampling error）という。データが標本での数値と考えられるときは、標本誤差がどれくらいかを吟味することが必要である。

標本の観測値から母集団を評価するときには、偏りに注目すべきである。偏りとは、誤差がプラス（あるいはマイナス）の一方に偏ることである。標本に基づいて母集団についての処置を考えるときは、標本に偏りのないことが重要である。

例えば、週刊誌に郵送料受取人払いのはがきを挟み込んで、「年金問題についての政府への注文を書き込んで送って下さい」としたら、不満を持った人だけがはがきを出すことになる。そうして得られたデータで、「政府に善処を求める声が 90%だった」と言っても、この 90%という数字は信用できない。はがきを出した人の意向が、はがきを出さなかった人とかけ離れているからである。一般にアンケート調査では、この種の偏りが避けられないので、回答率・回収率が 20%や 30%のアンケートの結果は、データとして信用できない。

### 2.4.4　確からしさと確率

ある命題の確からしさを評価するには、論理と経験の一方あるいは両方が用いられる。例えば人が死ぬのには、病気や事故といった原因が必要である。これは論理である。現代では 22 歳の若者を死に至らせる病気がきわめて少ないが、この若者に 2 輪車を運転する習慣があれば交通事故が死の原因として考えられる。それによる死の確からしさは過去の事故統計で評価できる。これが経験である。事故統計の主要部分はデータなので、経験による確からしさの評価はデータに基づくことになる。

1 つの命題の確からしさを 0 と 1 の間の数値で表すのは、確からしさを相対頻度、すなわち観測した回数の中でその命題が成立している回数の割合として考えているときに合理的である。実際、気象関係者が、「次の 11 月 3 日が晴れることの確からしさはほとんど 1 である」と言うのは、過去の気象統計上で 11 月 3 日がほとんど晴れているからである。M 大を受験するある生徒に対して担任の先生が、「君が合格する

かどうかは五分五分だな」と言ったとすれば、それはその生徒くらいの成績の生徒が受験して合格した例が、おおざっぱに言って 2 人に 1 人くらいだったからであろう。「さいころ投げで 1 が出ることの確からしさは 1/6 である」というのは、6 通りの場合が同じ条件にあるという論理によるものであろう。

このように確からしさの指標として使われる値を、数学で扱える概念として定義したものが数学の対象とされる確率である。すなわち数学の世界では、「確率」（probability）を、ある事象がどの程度の確からしさで生起しているかを、0 と 1 の間の数値で表したもので、1）同時には起こりえない 2 つの事象のどれかが起こる確率はそれぞれの確率の和である、2） 絶対に確かな事象の確率は 1 である、という性質を持つものと定義する。こうすることで確からしさが数学で取り扱える概念になるからである。

確率という数値の意味は、多くの場合「今日の午後に名古屋市で 1mm 以上の雨が降る確率が 30%ということは、こういう予報が出たとき 10 回中 3 回くらい雨が降り残りの 7 回くらいは雨が降らないことである」というように説明される。しかし実際の確率は、必ずしもこのイメージ通りではなく、もっとはるかに曖昧である。例えば、西区では 1.5 mm の雨が降り名東区では雨が降らなかったというとき、これを 1 回と数えられないからである。

個々人が確率を利用するときも、上のような 10 回中 3 回という解釈を文字通り信じて利用しているわけではない。たとえば傘を持って出ようかどうかを決めるときに「着ていく服は濡らしたくないし、風邪を引きやすい体質だから、確率は 30%と小さいが傘を持っていこう」というように利用したりしている。確率の値は、ごくおおざっぱな目安として利用するのが現実であろう。

天気予報での確率は、頻度論的立場から現実を抽象化・モデル化したものを基盤にして、科学的技術的に計算されている。しかしわれわれがそれを日常生活で利用するときは、その計算法を正確に理解して使うべきというものではない。生活経験の中で自分流に確率の値を利用するので良い場合が多いのである。

一般の人が確率について心得るべきことは、1）確率が大きい事象の方が、確率が小さい事象より、生起・実現が期待できること、2） 非常に小さい（あるいは大きい）確率の事象が現実に起こったなら（あるいは起こらなかったら)、多くの場合確率計算の前提が間違っていると考えること、である。

当たる確率が 0.01%でも当たりくじに引く人がいるのは、確率が小さいことでも起こるということではなく、誰かが当たる確率が 100%ではあるが、その誰かが自分である確率は 0.01%であるということである。

確率は「事象」（event）に対して定められる数値である。条件を定めないで、「自動車事故で死ぬ確率は飛行機事故で死ぬ確率より大きい」という表現を用いることは、確率を用いた説明として使うべきでない。「今日から 1 年以内に私が交通事故で死ぬ」ということは事象として考えられるが、死ぬ主体を規定しないままの「自動車事故で死ぬ」という命題は、確率を与える対象として考えられない。事象は、起こりえるこ

との全体、すなわち考えられる根元事象の全体があったときに、その一部として確率が付与できるものである。

確率を考えるときは一般に、前提として、不確定性を持つ事象の起こりやすさを考えているのが普通である。しかし世間の人はそうでなく、曖昧なこと、はっきりしないことの程度に、確率という概念を考えていることが少なくない。

たとえば、麻雀で最初に親を決めるときにはサイコロを振る。そのときに誰が親になるかということは、純粋に不確定なことであり、確率も計算可能である。しかし、途中で「この牌を捨てたときに相手が満貫を上がる確率は 80%ぐらいかな」と考えるときの確率は、「捨てられている牌から考えてかなり危ない」と感じていることを、確率という数値に置き換えたに過ぎない。「主観確率主義者」（subjectivist）と「頻度論主義者」（frequentist）が確率に異なった性質を想定するのは、こういう曖昧さの確率表現を認めるか認めないかである。認めるのが前者で認めないのが後者である。

明日午前の天気が、雨、曇、晴、のどれかであるとき、「曇の確率が 0.3 で晴の確率が 0.5 ならば、傘を持ってでなくても、濡れない確率は 0.8 である」というような関係が確率の「加法性」（additivity）である。同時に起こりえない複数事象のどれかが起こる（確かである）確率は、それぞれが起こる（確かである）確率の和である、という性質である。

加法性は、確率の定義として認められている確率の性質である。この性質を確率の定義として用いるのは、頻度論の立場で事象を考えたとき、その事象の起こる割合がこの性質を持っているためである。

確率に絡んで、加法性と似た感じで登場する性質に「独立性」がある。「娘が今日外で夕食を食べてくる確率は 90%である。夫が今日外で夕食を食べてくる確率は 80%である。したがって 2 人とも夕食を食べてくる確率は掛け算で 72%である」という計算は、多分間違いないであろう。このようにほとんど無関係の事象が同時に起こる確率を掛け算で計算するのは、頻度論の立場で合理的である。サイコロ投げのような事柄では、よく当てはまるからである。

このように積で確率を計算してよいことを、「乗法定理が成り立つ」と言うことがある。これは適切な言い方ではない。掛け算で確率を計算してよいというのは、確率の性質ではなく、「独立性」（independency）という事象の性質だからである。

サイコロ投げの結果が偶数であることのみを知らされたときに、それが 2, 4, 6 である確率をそれぞれ 1/3 とするのは、「条件付き確率」（conditional probability）の定義によっている。これに基づいて「出ている目が 2 である確率を $(1/2) \times (1/3) = 1/6$ 」と計算するのは、条件付き確率の定義を割り算でなく、掛け算で定義したものに過ぎない。これを乗法定理というのは適切でない。「事象 A を実現したときの事象 B の条件付き確率が、事象 A が実現しなかったときの事象 B の条件付き確率に等しいとき、事象 A と事象 B は独立であるという」と説明すれば、独立性という性質が確率の性質でなく、事象の性質であることが明らかになる。

事象が独立というのは数学的モデルの世界でのことであるから、この概念・性質を

現実に適用するときは、独立性が起こりやすさに直接の影響関係がないことのモデル化である、という認識が必要である。

### 2.4.5　確率モデル

ある薬 T がある異常行動 A を引き起こすという因果関係が疑われたとしよう。その真偽をデータに基づいて数学的に評価するには、確率モデルという道具で関係を定式化するのが 1 つの方法である。

例えば、ある時刻 $t$ で異常行動を発現していなかった人が、次の 1 時間の間に異常行動を発現する確率、すなわちハザード $h(t)$ が次式で表されるとする。

$$h(t) = h_0(t)\exp(ax)$$

この式で、$h_0(t)$ は、薬 T を服用しなかったときのハザード、$x$ は治療薬 T を服用した場合に 1、 そうでない場合に 0 という値を取る変数である。この式に基づくと、薬 T を服用した人は $\exp(a)$ だけ異常行動 A をとるハザードが大きくなる。この大きさをデータに基づいて評価すれば、薬 T の影響を評価できる。このようにして現実問題についての情報を整理するとき用いられる確率に関する数式あるいはそういう想定を「確率モデル」（probability model）という。

成人人口が 10 万人と多く、女性の比率が $p$ である地区で、10 人の裁判員をランダムに選ぶとする。選ばれた 10 人のなかの女性数 $Y$ は偶然に支配されて変動する。その数が $y$ という値である確率、すなわち、$\Pr\{Y = y\}$ には、次の確率モデルを想定するのが合理的である。

$$\Pr\{Y = y\} = \frac{10!}{y!(10-y)!} p^y (1-p)^{n-y} \quad (y = 0,1,\dots,10)$$

この $Y$ のように、不確定ではあるが、取り得る値が、例えば、0, 1, …, 10 というように定まっていて、それぞれの値と取る確率も定まっている変数を確率変数（random variable）という。

上の式は、確率が 0, 1, …, 10 のそれぞれに少しずつ分布していることを表している。このように確率が分布している状態を、確率分布（probability distribution）という。

確率分布は無数に多くあるので、性質が類似したものを区分けして名前や記号を付けておくと好都合である。このときできる集まりを「分布族」（family of distribution）という。いわば分布の家族である。

取り得る値が 1 次元空間の点である確率分布では、大分類として離散分布と連続分布という分布族が用いられる。

離散分布は、例えば 10 人の裁判員の中に選ばれる女性の数の確率分布のように、取り得る値が離散的な確率分布の集まりである。離散分布では、それぞれの値を取る確率 $f(y)$ を $y$ の関数（確率関数）として定めることで、分布族の個々のメンバーが指定できる。

離散分布の中には、さらに小さい集まりとして多くの分布族があるが、その典型として現実問題に頻繁に用いられるものに、（離散）一様分布、二項分布、ポアソン分布がある。例えばサイコロの出る目の数は、{1, 2, …, 6} において一様な確率を持つ分布であり、一様分布（uniform distribution）族の 1 つである。前に述べた裁判員中の女性の数の分布は二項分布（binomial distribution）と呼ばれる分布族の確率分布である。

連続分布は、ある地域集団でランダムに選んだ1人の成人の身長の確率分布ように、連続的な値を取る確率分布の集まりで、ある値 $a$ から別の値 $b$ $(a < b)$ までの確率 $F(b) - F(a)$ が、ある関数 $f(y)$（確率密度関数）を用いて、次式で表現される確率分布の集まりである。

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(y)dy$$

分布族の個々のメンバーは確率密度関数で指定できる。

連続分布の中には、さらに小さい集まりとして多くの分布族があるが、その典型として現実問題に頻繁に用いられるものに、（連続）一様分布、正規分布（normal distribution）、指数分布（exponential distribution）がある。例えば前述の成人の身長の分布は、正規分布に属する分布であると想定して、それほど不合理でない。ある高年齢に達した女性が、その後で脊椎骨の骨折を起こすまでの時間は、確率モデルとして、指数分布に従うことを想定するのが通常である。

例えば、第 $t$ 年の 1 年間に日本で生まれる子供の数を $N(t)$ と書こう。$t$ が今年以降であれば実際に $N(t)$ がいくらになるかは、不確かな事象である。しかし大体の値は昨年とあまり変わらないだろうし、来年以降もある程度の類似性をもって次の年、その次の年、というように変化していくであろう。その変化の法則性は、ある確率分布に従っていると想定可能である。あるいはそう考えてもそれほど現実離れをした認識ではないであろう。このように、時間と共に変化する状態を確率分布で認識する確率モデルを「確率過程」（stochastic process）という。

確率過程は、確率的変動に支配されるが、重要なことは、その影響が時間に関して連続的・継続的に続くことである。例えば、ある日にある株を多量に買う人が現れたとしよう。当然、株価が上がることになる。それを見た別の人達がこの株は有望株だから株価が上がったと判断すると、関連して翌日も買いが多くなってさらに株価が上がることになる。逆に、ある日の買い注文が偶然だと考えると、翌日は買いが相対的に減少して以前の株価あるいはそれ以下の株価に値下がりすることになる。この種の現象を数学的にモデル化したものが、「自己回帰過程」（autoregressive process）や「移動平均過程」（moving average process）である。

確率過程は数学的に取り扱いにくいものであるが、株価の変動、貿易収支、気候変動などの理解には、ある程度必要なことである。概念のレベルでの理解は社会常識とすべきであろう。

確率過程という認識を合理化・正当化するのは、そう認識するのが合理的とさせる

過去のデータの存在、例えば、過去の出生数の歴史的変化、株価の変動の過去の結果などである。このように確率過程の 1 つの実現結果と見られるデータのことを「時系列」（time series）という。

時系列は、時間と共に系統的に変化している部分に、確率的・偶然的に変動している部分が付け加わったものの観測結果である。時系列の中に潜んでいる法則性を見いだすのは将来の予測と危険の制御に非常に重要である。

確率過程と時系列という概念をリテラシーとして求めるのは、年金とそのための掛け金の合理性、地球温暖化への対策の策定、といった生活に密着した政策の決定に、最小限の認識が必要だからである。

「私が初めてフランスに行ったのは、確かボナスに行ったときだと思うけど、あれ何年だったかなあ」というように、昔のことが正確に思い出せないとき、この曖昧さを確率で表すことは一般に無理である。しかし、それに対して、「それが 1984 年である確率は 80%を超えると思うよ」と言ったとき、それは誤りだと言える人はいない。その場合の確率は、何回中何回という頻度の割合ではなく、自信の大きさを確率という指標を借りて表現しているものだからである。このように、曖昧なことについての確信の度合いを確率と同じ性質の数値で表現したとき、この数値を「主観確率」という。

主観確率は、確率の数学的性質が満たされていて、それを個々人がある種のルールで利用するのであれば、確率と呼んで差し支えないが、その値には客観的裏付けがないことが多い。したがって、自分が自分の責任で決定を下せる場合、すなわち決定が誤っても他人に致命的な被害を及ぼさないという場合にのみ用いることが許される確信度の指標である。

例えば、39 度という高熱で激しい咳の患者がある医院を受診したとしよう。もし、この頃にインフルエンザが流行していたならば、ウイルス検査をしないでインフルエンザ症であると判断して差し支えない。しかし、インフルエンザ感染者が全くいないときであれば、ウイルス検査の結果が出るまでインフルエンザ症であると判断することは差し控えるべきである。同じ症状が普通の風邪でも生じるので、どちらが流行しているかを判断に利用した方が正しい判断の確率を大きくするからである。

このような判断の仕方を数学的に表現すると次のようになる。インフルエンザと普通の風邪の患者の存在確率をそれぞれ、$P\mathrm{inf}$, $P\mathrm{col}$ としよう。インフルエンザに罹患したときに高熱と檄しい咳がでる確率が $P(heat|\mathrm{inf})$で、普通の風邪のときに高熱と檄しい咳が出る確率が $P(heat|\mathrm{col})$であるとする。このとき、高熱と激しい咳の患者がインフルエンザである確率と次式で計算するとき、この確率を「ベイズ（事後）確率」（Bayes probability）という。ベイズは人名である。

$$P(\mathrm{inf}) = \frac{P(heat \mid \mathrm{inf}) P\mathrm{inf}}{P(heat \mid \mathrm{inf}) P\mathrm{inf} + P(heat \mid col) Pcol}$$

ある事象が観測されたとき、その原因をベイズ確率で評価するのが、「ベイズ流」の推論で、ベイズ流の推論をいろいろな場面で多く使おうとする人を「ベイジアン」と言う。

　ベイジアンと主観確率論者は認識として区別されるべきであるが、現実には、ベイジアンに主観確率論者が多い。それは、例えばインフルエンザと普通の風邪の患者の存在割合、すなわち事前確率を客観的に定めることが困難で、それを主観的に決めざるを得ないことが多いからである。客観的に決めることができる事前確率のみを用いるベイジアンを「経験的ベイジアン」という。

# 第３章　数学の世界B：数学の方法

私たちがものごとを認識し、課題を解決し、意見の妥当性を判断するといった知的活動は、広い意味で「考える」（think）ことだと言えよう。そして考えるときに私たちは「言葉」を用いる。「言葉」は他の人とのコミュニケーションに用いられると共に、自らの中で「考える」ときにも用いられる。このとき用いられる言葉は、普通は通常の意味での「言語」、すなわち個人の「母国語」（mother tongue）であるが、実はそれだけではない。第 1 章で述べたように、数学は「普遍的な言葉」として、独自の「考える」方法（および他とコミュニケーションする方法）を持っている。

ただしそれは自然言語と全く別物なのではなく、異なる言語同士と同様に、相互に翻訳が可能である（「翻訳」は、100%同じ意味の言い換えなのではない、という意味も込めて)。同時に「数学言語」は自然言語と区別される、幾つかの大切な特徴を持っている。

したがって数学の方法を一言で言えば、「数学の言葉を用いて考える」ことである。そこでまず、数学の言葉（mathematical language）がどのようなものであり、それを用いて記述される数学理論（mathematical theory）の枠組み（framework）がどのようなものであるかを述べ、ついでそうした「数学語」を用いて考えることがどのような行為であり、どのような性格を持っているかを、数学を用いて問題を解決するプロセスに即した形で述べよう。それが数学の方法（method）であり、それを実行できることが数学の能力（competency）である。

## 3.1　言語としての数学

「数学は言語である」という言明に対し、理系と文系とで反応が分かれるようである。自然科学に関わる人達にとってはこの言明はきわめて当然である。だが、文系の人達はこれに「違和感がある」という。これは事実の両面を物語っている。数学はコミュニケーションの手段、考える手段としてまさに「言語」の機能そのものを持っている。しかし同時に自然言語からみると非常に「偏った」性格の言語であり、これが違和感を与えるのである。

以下、まず始めにこの「数学語」の特性について概括的に述べ、次いで「言語」としての数学語の働きを詳説しよう。「言語」の説明の通例として、数学語の「語」(word)、「文」（sentence)、文章（composition）がそれぞれどのようなものかを順に説いていくこととする。

### 3.1.1　「数学語」の特徴

数学の特徴として、次の 2 つがよく挙げられる：

１．抽象的であること（特に文字の使用)；

２．論理的であること。

ところが、これらは実はいずれも「言語」そのものの特性である。しかし数学は通常の言語（自然言語）以上にこれらの性格が際だっている。特に自然言語の場合には、論理と共に、レトリックによる情緒的な働きも大きいのであるが、数学はこれをむしろ意識的に退ける。数学の文章では必ず論理の筋が通っていなければならない。正しい命題による正しい推論の連鎖によって結論に至ること、これは数学では必ず必要とされる文章のルールである。

さらに通常言語との違いとしては、

３．数学は基本的に「記述言語」であること；

４．用語の意味に曖昧さを許さず、言い方も限定されたもののみを用いることが挙げられる。しかも数学でその記述に用いる記号はほぼ世界共通であり、数学者（や科学者）たちは数式を用いて「筆談」ができる。数学用語ではもちろんそれぞれの話者の言語が用いられるが、その多くは直接的に翻訳可能である。すなわち、その意味は万国共通なのである。この意味で数学は最もグローバルな言語で、英語をも遙かに凌いでいる。もちろん数学を通常の言語を用いて音声化して「語る」ことはでき、それはコミュニケーションに必要でもある。漠然とした表現や、例示的・暗示的な言い方を補助的に使うことも相互理解に有効であるが、知識体系としては上記の骨組みがきちんと存在していなければならない。もう1つ、さらに数学語に特有のこととして、

５．思考・コミュニケーションの補助手段としての図形（特にグラフ）の使用がある。自然言語でも「シンボル」は用いられるが、数学では「数字」「記号」と並んで「図形」が本質的な役割を果たしている。数学が幾何学において「図形」の性質を探究することで自らの言語を精緻なものへと築き上げていったことは本質的に重要な事実である。

なお科学における言語としては、もう１つ新しいものとして「コンピュータ言語」がある。これは「コンピュータと人間がコミュニケートするための人間側の言語」である。これについては、情報科学専門部会の報告の中で語られるであろう。

### 3.1.2　数学語の「語」

数学用語　数学で用いる「自然言語（の独立語)」（これを普通「数学用語」という）はできる限り厳密に「定義」され、曖昧さのないものとなっている。例えば「円」とは「平面内にあって、ある点（中心）からの距離（半径）が一定である点全体の集合」のこととされる。また自然言語に比べると、数学語の語彙数は圧倒的に少ない。

もちろん定義にはまた数学用語が使われるので、この意味ですべての数学用語を厳密に「定義」しつくすことはできないが、理論の記述に当たっては「その場で用いるのに十分な厳密さ」が保たれるように配慮される。例えば「集合」は「ものの集まり」といった説明で済まされることが多い。しかし数学的に集合を取り扱う際は、集合に属する「要素」が定まっていて、あらゆる数学的な対象についてそれが「当該集合に属するか否か」が決まっている、という性質が重要である。

このことは特に数学教育で重要になる。学習者に対しては、不必要な困難を避けるために、必ずしも数学的に厳密な定義を行う（あるいは定義を変更する）ことなく用語を用いることが多い。しかし教師の側は、どこまで厳密さを犠牲にしているか、あるいは異なった定義を前提にしているか否かを自覚して指導にあたらなければならない。生徒が「分からない」というときに、実はその厳密性の不足や定義の不整合性を感じ取っているところに原因がある場合が少なくないからである。

同値な定義・概念の「自由さ」　数学の言葉はこのように抽象的で厳密に定義されるので、拡がりに欠けた「面白みのない」ものと誤解されがちであるが、実は全く違う。数学ではひとつの概念が様々の形、時には全く違う形で多様に「定義」され、それによって新たな世界の拡大が得られる、という自由さ、言わば「とびとびの」自由さを持っているのである。例えば 5-3（5 から 3 を引く）は直観的には、5 個あるものから 3 個を取り去った残りの個数と理解される。これを 3 に加えたら 5 になる数、つまり加法の逆演算ととらえ直すことで、負の数への減法の拡張が可能になる。また「直線」は直観的には「まっすぐな線」であるが、数学的には定義を充たしさえすれば何でもいい。例えば球面上の「大円」を直線と見なすことで、ユークリッド幾何学とは異なる別の幾何学が得られる[35]。また平面や空間に「座標」を導入することにより、平面や空間の「点」という幾何学的概念は 2 個または 3 個の数という代数的な概念として表される。この言い換えを行うことで、私たちは私たちの持っている 3 次元までの空間的直観を越えて、いとも簡単に一般次元空間を考えることができる。つまり 4 次元空間の点なら 4 個の数の組、5 次元空間の点なら 5 個の数の組、一般に $n$ 次元空間の点は $n$個の数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とすればよい。この数と幾何の対応は数学において最も重要な多面的にものを見る方法である。

数学記号　数学では、自然言語のための文字だけではなく、数学特有の「表意文字」である様々の記号（symbol）を使う。演算記号（+, -, ×, ÷など）、関係記号（=, <, ⊥など）、性質を規定したり、作用を表す記号（∠, √￣）などがある。多いようだが、これも漢字に比べれば、その数は圧倒的に少ない。

この中で最も重要なのは等号 “=” である。これは両辺にある数学的な対象が「等しい」ということであるが、何が等しいのかは前もって定義されているか、その文脈に従って判断されなければならない。例えば整数を用いて分数表示された二つの有理数 $a/b$, $c/d$ が「等しい」とは、$ad = bc$ が成り立つことである（これは整数において「等しい」ということの定義ができているとして、有理数での「等しい」を

35　ヒルベルトが直線や点を「無定義用語」として、具体的に「机」「椅子」を考えても構わないと言ったのは、妥当性を欠く。それらは例えば「2 点を通る直線が 1 つしかもただ 1 つ存在する」という公理を満たす必要がある。これらの用語は前もって（a priori）に定義されてはいないが、公理系をみたす概念であるという形で最終的（a posteriori）には定義されている。このような定義の仕方を「運用的定義」（operational definition）とよぶ。直線の例で言えば､非ユークリッド幾何学の微分幾何学的実現によって直線とは常に（局所的には）最短距離を行く（「測地的」とよばれる）曲線（1 次元の図形）という新たな（ユークリッド幾何・非ユークリッド幾何に共通な、否それどころか遥かに一般の状況の下に考えられる）性格付けを得たのである。

定義しているのである)。よく見られる "1 = 0.999..."の問題は、じつはこの「等しい」が何を意味するか(今の場合、右辺で定義されている数列の「収束する値」が1に等しい)が明確になっていないために、理解が難しいのである(cf.[4.3.4])。これに近いものに「ある特定の性質が等しい」こと(同値関係)を表す記号がある(例えば≡(合同)、∽(相似)、⇔(同値)など)。

文字　数学では、数、図形(特に点)、性質、命題などの言語的なまとまりを一つの文字(あるいはその組み合わせ)で表すことが多い。これによって表記を簡略化すると共に、その表現する内容が一般的に成り立つことがらであることを言い表し、さらに文章(数式)の中でその文字が表すものの持つ数学的な役割を明らかにする。例えば (100+1)(100-1) = 101×99 = 9999 = 10000 − 1 と数で計算したのでは、正しいことは分かっても、なぜそうなるか、偶然の一致か否かははっきりしない。これは文字で置き換えると一般的に $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ となることが分かって、初めてこれが一般的に成り立つことがらの特別な場合であることが(その理由を含めて)分かる。

文字は自然言語の代名詞にあたる。数学はいわば代名詞のきわめて発達した言語なのである。一方代名詞であるから、その文脈で何を表しているか、その表記の有効範囲がどこまでかが明確になっていなければならない。同じ文字が少し離れた場所で違うことを表す場合、また逆に同じ内容が少し離れると違う文字を使って表されている場合もあるので注意が必要である。

文字が数を表す場合、その文脈の中で、ある定まった数を表す場合(定数(constant))と複数の可能性を許容する場合(変数(variable))とがあり、両者は区別される必要がある。変数の場合、その数の取りうる範囲(変域)あるいは性格(「整数である」など)が明確になっていなければならない。また(条件によって)定まった数ではある(と期待される)が、まだ分かっていない数(を表す文字)は未知数(unknown)と言われ、既に分かっている定数(既知数)とは区別される。なお、同一の文字が定数であるか変数であるかもその状況に応じて変化するので注意が必要である[36]。

### 3.1.3　数学語の「文」

命題　数学用語、記号、文字等を使って書かれる(数学的に意味のある)文を「命題」(statement)という。命題には幾つかの種類がある。

定義と例　まずある概念や記号を定める「定義」がある。上の「円とは○○のことである」というのは定義の例である。定義の後には、具体的な「例」が書かれることが多い。ある概念を理解するのには、定義と共にその代表的な例を知ることがとても重要である。問題を考える場合には、まず具体例で考えてみることが解決のため

[36] 特に注意すべきは「助変数」あるいは「パラメータ」と呼ばれるものである。これは当該事象では当面定数として考えるが、さらに考察を進めた段階でその値を変化させることになる。

の良い助けになる[37]。

これに対し、1 つあるいは複数の概念に関する重要で、後で応用がある性質を述べる「正しい」命題を「定理」という。「正しい」とは、正確には、公理系などの与えられた枠組みの中で定められた手順（演繹的推論）に従って「証明できる」ことを言う。例えば「円はすべて相似である」というのは 1 つの定理であり、この定理の事実が成り立つことから、円周率の定義が意味を持つ（円周率は円の取り方に依らず、定まる）ことが分かる。このように定理から直ちに導かれる命題を「系」という。定理ほどの重要性がないが、述べておいた方がいい正しい命題を（狭い意味で）「命題」という。この「重要性」の認識は人によって異なるので、どれが「定理」でどれが「命題」かは必ずしも定まっていないが、幾つかの「定理」はよく知られ、特別の名前が付いている。例えば、「高等学校までで習った最も印象深い定理は何か」とアンケートを取ると、「ピタゴラスの定理」（あるいは「三平方の定理」とも言う）が断然 1 位になる。これは「ある三角形△ABC が直角三角形ならば、（∠A が直角とすると） $AB^2 + AC^2 = BC^2$ が成り立つ」という命題で、多くの命題はこのように、2 つの命題Ｐ、Ｑを用いて「ＰならばＱである」という形を取る。最初に述べたように定理は必ずその正しさを「証明」されなければならないが、その定理の証明のためにそこで用いられる命題を「補題」あるいは「補助定理」という。補題は（証明自身は難しくなくとも）その定理の証明の鍵となる大切なアイデアを述べている場合が多い。

予想・仮説　数学の文章では原則として、そこで用いる命題は証明されていなければならないが、「正しい」かどうかが分からない命題もその重要さから扱う場合がある。否、学問研究においてはむしろそのような命題がたくさんあることが重要である。それらは「予想」あるいは「仮説」とよばれる。「フェルマーの最終定理」とよばれる命題「$n > 2$ のとき、$a^n + b^n = c^n$をみたす自然数 $a, b, c$ は存在しない」は 300 年以上の長きにわたって「予想」であったが、10 年余り前に証明されて今は文字通り「定理」になっている[38]。

数式　数、文字、数学記号だけで書かれた命題を「数式」という。数式は、単なる記号の羅列ではなく、自然言語の 1 つの文として読むことができる。例えば “$2 + 3 = 5$”は「2 に 3 を加えると 5 に等しい」と読める。また “$|AB| + |BC| > |AC|$”は「（線分）AB（の長さ）と（線分）BC（の長さ）との和は（線分）AC（の長さ）より大きい（長い）」と読める。日本では数式が 1 つの（意味を持った）文であるという意識が余りない。これは数式の記号の記述順序が印欧語の文の語の順序に合う形で並んでおり、日本語の語順とは違うことが影響していると考えられる。例え

---

37　一方で「自明な」例も誤った命題を排除するのに役立つ。

38　しばらく前には「（3 次元）ポアンカレ予想」が解かれて話題になった。古くからあるのに今なお未解決の有名な予想に「リーマン仮説」「ゴールドバッハの予想」などがある。なお、こうした「予想」が証明されると、単にそれが「定理」に変わるだけではなく、その証明の過程で重要な理論の進展あるいは新しい理論の誕生があるというのが歴史的経験則である。

ば最初の式は英語ならば “2 and 3 is (equal to) 5.” とそのまま読める。

恒等式・方程式　ある一定の範囲の数または量に対して成立する数式を恒等式（identity）という。これに対して考えている範囲の中の特別な数量に対してのみ成立する式を方程式（equation）という。それはこの特別な数量を未知数として、その性質を表現するものである。方程式に対し、それが成立する数量を求めることを「方程式を解く」という。上に挙げた $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ は任意の実数 $a$, $b$ に対して成立する恒等式である。これに対し、$x^2+y^2=1$ という式をみたす（この命題が正しい）実数 $x$, $y$ は限られており、座標平面を用いてそのような $(x, y)$ すべてを表示すると、原点を中心とした半径 1 の円が得られる。そこでこの式は原点中心半径 1 の円の方程式と呼ばれる。

### 3.1.4　数学語の「文章」

論証　文章とは一連の文からなり、全体としてある「主張」を述べるものであって、数学の文章も然りである。ただ数学の各々の主張は、一定の前提から定まった推論を経てその結論として得られるものでなければならない。すなわち「ＰならばＱである。Ｐである。ゆえにＱである」という形を取る。この場合、「ＰならばＱである」という命題が正しく（すなわち証明され）かつ「Ｐである」という命題が真であるときはじめて「Ｑである」ことが真であると結論されることになる。これを「論証」（argument）とよぶ。私たちが「論理的にものを考える」と言うときに、一番大切なのはこの部分に関わっている。論証について 3 つの点を強調しておきたい。まず第一に、「論証」は「説明」とは異なる。すなわち論証は、数学に特有のある定まった手続きに従って行われなければならない[39]。説明では結論に相手が納得しさえすればよいので、「もっともらしい」でも十分な場合がある。しかし論証では、前提が真であることを受け入れる限り、相手は結論を受け入れざるを得ない。数学は推論について 100%の確かさを要求するのである。次に、しかしその一方で「論証」は説明の一種であり、相手を納得させるためのもの（ただし否応なく）だということである。それは決して単なる約束事、手続きなのではない。そのプロセスひとつひとつが、（自分自身を含めて）証明を読む者に前提から結論へと至る道筋を説き明かすものなのである[40]。そして最後にもうひとつ大事なこととして、したがって論証とはあくまでも正しいことが分かった上でその正しいことの説明を記述したものであり、どのように正しいことが分かったかという「思考のプロセス」とは基本的に別物だと言うことがある。後者は問題解決のプロセスであり、それについては次節で取り扱う。

命題の真偽　数学の文章において用いられる「命題」はまず（与えられた状況の下で）必ず真であるか真でないかが判定できるものでなければならない。「彼は私を愛している。」というのは、数学の命題とは言えない。「ユークリッド幾何学」のように

[39] 哲学で用いられるものと基本的に同じである。

[40] このような視点は学校（特に中学校）で証明を学ぶ場合にきわめて重要である。

一群の命題を「公理」としてそれが真であることを前提として出発する場合もあるが、これはむしろ「ユークリッド幾何学」という理論の定義であると考えた方がよい。よく知られているように、この公理のうち「平行線の公理」などをこれとは異なる別の公理で置き換えると別の幾何学（非ユークリッド幾何学）が現れる。

証明　上に述べたように数学の文章において、命題の正しさは必ず「証明」されなければならない。その「証明」は、定義およびすでに正しいことが分かっている命題を根拠にした、「演繹的推論」とよばれる一定の手続きとして行われる。

その仕方は大雑把に言えば、上記の論証をさらに細かく分割する、「PならばQである、QならばRである。ゆえにPならばRである」という三段論法と呼ばれる形を連ねて証明されることが多い。他の形もこの変形と見なせる。ここで大事なことは、「証明」として実際に書かれるものは形式的観点から言えば「要約」に過ぎず、したがって、その書き方は一通りには決まらないということである。読み手とのある種の「了解」があって、ほとんどは簡略化した様々の表現を用いて書かれる[41]。多くの部分は形式的な操作あるいは前提や定義の直接的な適用であるが、（すでに証明されている）定理や命題が適用できればそれを用いて簡略化することになる。しかし多くの場合それは単なる省力化ではなく、むしろ証明の大事なアイデア、命題が成立する意味を明らかにする。また形式的な操作でも、例えば補助線を引いたりすることで、その証明の道筋が明瞭になる箇所がある。証明を読む者はこうした証明のキーポイントあるいはアイデアを見抜くことが証明の理解に不可欠である。単に論理の筋道を追うことは、証明の正しさの確認に過ぎず、証明の「理解」とは異なる。逆に証明を書く場合には、こうした方針やアイデアが読み手に明確に伝わるよう心がけなければならない。それが数学語の「良い文章」なのである。

対偶命題・背理法　「P ならば Q である」という命題が正しいか否かは「Q でないならば P でない」という命題（対偶命題）が正しいか否かと全く同じである。したがってある命題を証明するためには、その対偶命題を証明してもよい。例えば「2 以外の素数は奇数である」ことは「偶数ならば 2 で割り切れる」ことから従う。

これと似たよく使われる証明法として背理法がある。これは「Pである」ことを証明するのに、「PでないならばQである」と「PでないならばQでない」という二つの命題を証明するやり方である。代表的なものとして $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明がある[42]。

逆必ずしも真ならず　「P ならば Q である」という命題に対し、「Q ならば P である」という命題を前者の逆という。前者が正しいからといって後者が必ずしも正しいわ

---

41　前と一見矛盾する言い方になるが、読み手が納得してくれるならば途中を省略してよい。「証明されている」とは、正確に言えば読み手がどのように詳しい論証を要求してもそれに答えることができるという意味である（その意味でそれぞれの「書かれている証明」は一種の「近似」である）。学校の証明問題で生徒が迷うのは「どこまで書けばよいか、どこは省略してよいか」という点である。この場合の 1 つの指針は「読み手」として（教師ではなく）「一緒に学んでいる生徒達」を想定することである。

42　$\sqrt{2}$ が有理数 $a/b$ と既約分数表示されたと仮定して、この表示が既約でないことを示す。

けではない。例えばある自然数が4で割り切れれば2でも割り切れるが、2で割り切れたからといって必ずしも4では割り切れない。これは「逆必ずしも真ならず」としてよく知られている。ところで「PでないならばQではない」という命題（裏命題）は逆命題の対偶にあたるので、同じ理由から「「PならばQである」から「PでないならばQではない」」という論法は正しくない。しかしこの論法は日常生活において、特に政治家のレトリックなどでしばしば使われるので注意が必要である。

「すべて」と「ある」　命題には複数の対象に対するものがある。上に現れた「ある自然数が 4 で割り切れる」という命題は、自然数 $n$ を特定して初めてその命題が真であるか偽であるかが定まる。このような命題を「命題関数」とよび、正確には $\mathrm{P}(n)$ と書く。そして上の命題はより正確には「すべての自然数$n$について、$n$が 4 で割り切れるならば、$n$は 2 でも割り切れる」となる。「すべての」なので、「全称命題」と呼ばれる。これが成り立たないことを言うには、成り立たない例（反例）が1つ存在すればよい。この命題の逆は「すべての自然数$n$について、$n$が2で割り切れるならば、$n$は4でも割り切れる」であるが、$n=2$ のときこの命題は成り立たない。すなわち「ある自然数$n$について、$n$は 2 で割り切れるが、$n$は 4 では割り切れない」となる。このような命題は「存在命題」と言われる。逆に存在命題の否定は全称命題の形になる[43]。これを用いるとよく知られた「クレタ人は嘘つきだとクレタ人が言った」というパラドックスの正しい解釈が得られる。これは正確には「「すべてのクレタ人が嘘つきである」とあるクレタ人が言った」のであるから、「すべてのクレタ人が嘘つきである」という命題が正しくない（あるクレタ人は嘘つきではない）ことは、このことからこのクレタ人が嘘つきであることが知られるという事実とは（クレタ人が複数いるかぎり）何ら矛盾しない。

存在定理　「素数は無限個ある」という『原論』に書かれている定理がある。この場合私たちは存在を知っているだけで、その具体的なリストを知らない[44]。このようなタイプの定理を「存在定理」という。存在定理は現代数学になって重要になってきた。すなわち代数方程式や微分方程式の解について、その解を具体的に数値あるいは数式で表すことなく、「解である」ということだけからその様々の性質を導く方法が一般的になった（[2.3.3]）。この場合もし解が存在しなかったら一切の議論は無意味である。そこで別途解の存在を保証しておくのである。これに対して「解の公式」と呼ばれるタイプのものは、解そのものを数式の形で表す。2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ に対して、「判別式 $D=b^2-4ac\geq 0$ ならば実解が存在する」というのは存在定理であり、「その解は $\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ と表される」というのが解の公式である。前者を証明するのには、関数の値の変化を調べればよく、解の公式は不要である[45]。

[43] この形の論理は述語論理と呼ばれる。

[44] リストを書く方法は知っている（エラトステネスのふるい）が、それは証明を与えない。

[45] そのかわりに「中間値の定理」と呼ばれる位相幾何学的な一般的定理（本質的には実数の完備性）が必要になる。

一方後者では公式が意味を持っているかどうかをチェックする必要がある[46]。なお存在定理はあくまでも数学的に厳密な意味での存在を保証するものであって、私たちがその存在をリアルに感じられることとはずれが起こりうる。例えば私たちは実数（real number）の存在を疑うことはないが、複素数に対してはなかなか現実感を持てない。実数以外は「想像上の」（imaginary）数なのである。しかし存在定理の証明は前者の方がはるかに難しい。

効果的な（effective）証明　方程式などで解の具体的形は分からないにせよ、それを近似的に求めることは役に立つ。存在証明が単に抽象的に存在をいうのではなく、その解を求める方法（アルゴリズム）を与えている場合、そのような証明は効果的であるという。ニュートン法などの近似計算法の多くは収束するための十分条件とともにあるので、解の存在の効果的証明と言える。近年のコンピュータの発達によって、こうした証明法の重要性が一層増している。

数学的帰納法　数学に特有の証明法の 1 つに数学的帰納法がある。これは無限個の命題 $P(n)$ ($n$ は自然数)を一挙に証明してしまう手法である。すなわち

$P(1)$ が正しく、「すべての $n$ について、$P(n) \Rightarrow P(n+1)$」が正しい

ならば「すべての $n$ について $P(n)$ が正しい」というものである。これは実は「自然数」の最も本質的な性質としてペアノが取りだした。すなわちこの証明法が正しいこと（数学的帰納法の原理）は自然数の定義（公理）に含まれる。

### 3.1.5　計算とアルゴリズム

（式）計算　数学の活動として大きな部分を占めるものに数や文字を用いる計算がある。計算の多くの部分を私たちは形式的に実行するため、そのプロセスを余り意識せず、途中を書かずに答だけ記すこともまれではない。しかしそうする前提として、計算はあくまでも数式を用いた文章なのだという事実を私たちは忘れてはならない（言わば非常に便利な定型文を書くようなものである）。すなわち計算手順を実行することは論理的な推論を行っていることに他ならない。そしてその計算 1 つ 1 つにはきちんとした数学的な意味がある。普段はそれを意識しなくてよいのだが、必要なときにはいつでもその意味が分かるのでなければ計算を「理解している」とは言えない。ここにコンピュータと人間の違いがある。なぜ分数の掛け算では分母同士、分子同士を掛ければよいのか、-1 と-1 を掛けたらなぜ 1 になるのか、それが納得できないのは、人間だからである。そしてそれを理解することは人間の成長にとって極めて重要である。

アルゴリズム　ある種の一般的な問題についてその解に至る一定の手続きがはっきりしているとき、それをアルゴリズム（algorithm）という[47]。私たちは小学校で（非負の）分数や小数の四則演算について十進法に基づく筆算のアルゴリズムを学ぶ。また中学に入ると負の数の扱いや文字式の扱いを学ぶ。これらは代表的なしかも優

---

[46] 実解の範囲で考える場合、$D<0$ だと平方根が存在しない。

[47] この用語は 8-9 世紀のアラビアの数学者アル・フワーリズミーの名に由来する。

れたアルゴリズムであり、人間が産み出した最大の文化遺産の1つである(cf.[4.2])。その発展として、連立線形方程式や高次方程式、微分方程式などを数値計算で解くアルゴリズムが開発され、知られている。こうした計算においてアルゴリズムが確定していて、機械的にそれを実行できることは私たちの思考エネルギーの多大な節約になっており、そこに数学の大きな価値の一つがある。またそうした手順の部分は現在コンピュータに任せることもでき、そのことで私たちはとてつもなく高い能力を獲得することができている。様々な計算機アルゴリズムの開発は、人間業では考えられなかったようなより広範な問題への解法を与え、数学としても新たな分野を切り開きつつある。かくしてアルゴリズムは最も古い文化でありながら、同時に今なお最もアクチュアルな文化であり続けているのである。

計算量　その例を1つ挙げよう。コンピュータの普及に伴って、計算にどのくらいの手順の多さが必要になるかという評価が重要になった。手順があったとしても、然るべき時間内に計算が終了しなければ実用にならないからである。これは計算量の理論あるいは計算複雑性の理論として現在発展し、用いられつつある。

ところでこうした最近の傾向から、小学校などでの計算アルゴリズムを学ぶ必要はないという意見があるが、これは正しくない。確かにアルゴリズムを実行するのは計算機であるが、アルゴリズムを考え出したり、それをうまく利用し、あるいは評価するのは人間である。そのためには代表的なアルゴリズムを知り、自由に扱えることが必要である。よりよいアルゴリズムを考えるとは、例えば計算手順を工夫して速く正確に答えを出すことがそれに当たる。また上に述べたような計算アルゴリズムの正当性を理解することは、有理数や整数の本質を理解することに直接つながっている。確かに計算アルゴリズムを直接用いるという意味での実用性は減じているが、それを知り、理解する重要性はむしろ増しているのである[48]。

### 3.1.6　図表現

数学言語のもう 1 つの大きな特徴は、直観的・総合的表現として図による表現（graphic representation）を持っていることである。数や記号による表現がきわめて厳密で正確な意味を持ち、その一方でその抽象性から理解の難しいところがあるのと対照的に、図による表現は直截的で「一目で分かり」「一度見たら忘れない」が、一方でその与える情報が多過ぎて多義的になってしまうことも少なくない。両者は相補う形で数学的内容を表現し、伝える手段となっているのである。

したがって図による表現では、図を見た者の受ける印象が表現されている内容と一致しているかどうかが重要である。不適切に表現された図では、その内容が伝わらないどころか、事実と逆の印象を受けてしまう場合さえある。意図的にそれが行われることも少なくない。いわゆる「統計で嘘をつく」場合である。そこで私たちはこうした図表現から「正確な」内容を読み取る能力、そしてその図表現が適切で

[48] 逆に言えば、意味も分からずに計算だけ実行できるようになることで終わるのは、人間の教育とは言えない。

あるかどうかを含めて判断する能力を持たなければならない。言い換えれば、図表現は文章と同じく何らかの「主張」を持っているのであって、私たちはその主張が何であるかを読み取り、さらにその主張が正しいかどうかを判断することが必要なのである。

図表現には様々のものがあるが、よく使われるものとして、（通常の）グラフ（graph）、地図（map）の類、ダイアグラム（diagram）などがある。

グラフ　（狭義の）グラフとは、幾つかの項目（有限集合）あるいは変数（量）に対応する量（数量化されたデータ）を長さ、角度といった量で置き換えて視覚化したものである。頻度などを表すに適した棒グラフ、変化を示す折れ線グラフ、割合を示す帯グラフ（以上は長さ）および円グラフ（角度）などいろいろの種類がある。また単に 1 個の量を示すのではなく、幾つかの量を重ねて 1 つの図に表したり、特別の表現を加えたりする（箱ひげ図）。これらは多く統計のデータ表示に用いられるが、数学内部でも関数のグラフはその性質の理解にきわめて重要である（cf.[2.3]）。

図　幾何学は元来土地の測量にその起源を持ち、今も地図などを通して私たちの日常に深く関わっている。地図から情報を読み取る場合、私たちは幾何学的概念を用いている。地図上の長さと縮尺を知って実際の距離が知られるのは相似形の基本性質である。土地の案内図で「現在位置」の表示がないと分かりにくいが、これは座標で原点を指定することに対応する。座標軸に当たる情報は方位記号あるいは周辺の景色（特に道の向き）によって与えられる。幾何では円や多角形、直線といった簡単な図形に問題を帰着させるが、これは道順を示すときに必要なだけの情報を図示することと同じである。また地図の上にはさらに別の量や性質を表示できる。その代表的なものに等高線（及びその類似）がある。これは同じ量の場所を結んでできる曲線を幾つかの数値の場合に描いていく手法である。土地の高さの場合が等高線であり、天気図で気圧を量とした場合が等圧線である。これを用いると、間隔がつまっているところは変化が大きく、開いているところは変化が少ないという（数学的な）情報が得られるので、その結果、等高線の間隔は斜面が急かどうかを示し、等圧線の間隔は風の強弱を表すことになる。

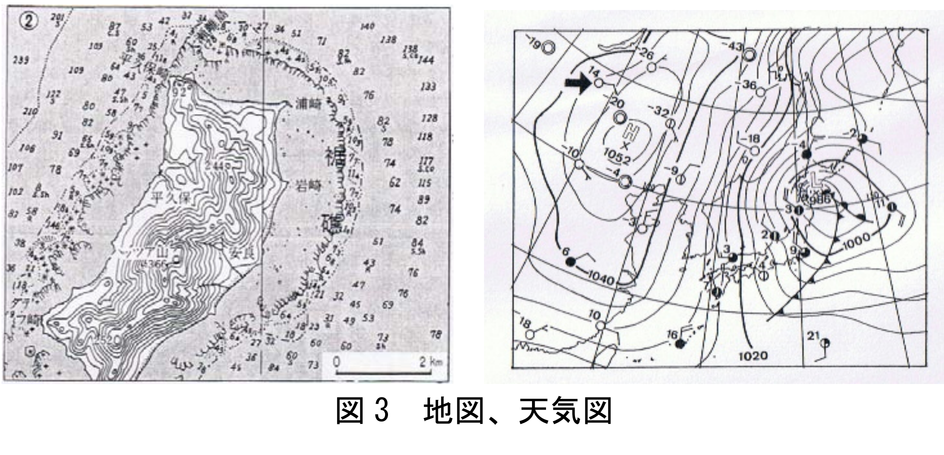


**図 3　地図、天気図**

ダイアグラム　人と人との関係などを表す相関図、層化した分類を示す系統図、手順を示す流れ図など、幾つかのものが「つながっている」かいないかを示すのがダイアグラム、あるいは（グラフ理論で言う）グラフである。上に挙げたものは多く単に分かりやすい表現に過ぎないが、近年こうしたグラフそのものあるいはその上に展開される構造の数学的性質を研究することが盛んになっている。その最初の例はオイラーによる「一筆書き」の研究である（cf.[2.2.3]）が、そこで見られたように、問題をグラフのそれに帰着させることが有力な問題解決手段を与える。ただグラフの問題は、たとえ数学的には単純であっても、頂点の数の増大と共に計算量が飛躍的に大きくなる性質があり、近年の発展はコンピュータの発達や非線形問題研究の進展と軌を一にしている。カーナビでの最短経路探索などはその代表的な応用例である。

## 3.2　問題解決・知識体系の構築としての数学の方法

私達がものを考えるのは何か課題を解決するためである。そこで数学を用いて課題を解決するという過程（process）がどのようなものであるかを考えよう[49]。

### 3.2.1　数学問題解決サイクル

一般的にものを考えるプロセスは「認識（理解）する」（recognize, understand）→「（狭い意味で）考え（consider, contemplate）、処理する（carry out）」→「表現する（伝える）」（represent, communicate）ことになる。数学を用いてものを考える場合にはここで問題の「数学語」への切り替え（翻訳）の必要が生じる（「数学化」（mathematization）[Freudenthal]）。そこで数学を用いた問題解決の過程は次のようなサイクルで表される：

１）問題を数学の言葉で言い表す（formulate mathematically）（数学化）;
２）数学の問題として解決する（solve in mathematics）;
３）数学で得られた解を本来の問題に適合する形で表現する（represent, describe）;
４）本来の問題の解として適当かをチェックし（check）、更なる進展を検討する（feedback）。

そしてステップ２）では数学内部の問題としても、似たようなプロセスが繰りかえされる[50]：２a）問題を理解し「適切な」数学の問題として言い表す（言い換える）（定式化）；２b）言い換えられた問題を解決する；２c）得られた解を初めの問題に合う形で表現する（チェックやフィードバックを含む）

実はまたさらに２b）の途中で別の問題への言い換えや部分的な問題への分割が行われ、同様のサブプロセスが実行される等々という何重もの「入れ子」構造が現れる。また途中で当初の問題に戻っての検証が行われることもある。

ところで何かある問題を解決する営みは、単に自己の既存の知識を応用することで

---

49　基本的文献として [Polya][Schoenfeld][PISA2006] を挙げておく。
50　[Polya][Schoenfeld]は主にこのプロセスを扱っている。

はなく、同時に自らの知的体系を更新していくことでもある。問題を定式化することは、自己の知識体系の中に問題を位置付けることであり、問題を解く行為は知識体系の更新作業そのもの、そして問題を表現することは更新された知識体系の部分を意識化・明確化することに他ならない。問題解決という「外的な」行為は、必ずこうした自己の「内的な」知識体系の更新を伴う。これが問題解決の持つ教育上の意味である。学習するとは自己の知識体系を更新してゆく営みであるが、この意味で問題を解決することは同時に自らにとっては学習であり、また学習はより多くの問題を解決できるよう自らの知識を豊かにすることなのである[51]。

### 3.2.2　問題の数学化・定式化

・条件の明確化・意識化　一般的に問題が与えられたとき、まず第 1 に行うことは、問題をはっきりさせることである。最終的に何を得たいのかがまず明確でなければならないのは当然であるが、次に大切なのは、何が所与の条件であるかを明確にすることである。

・数学化　次に（と言っても、時間的には同時並行であることが少なくない）行うことは、問題を数学の言葉で表現することである。数式で表現することも多いが、その場合には立式という。一般には問題をある種の数学的なモデルとして捉え、その中の問題として言い換えるのである。具体例で考えよう。

［問題 1］ある山の麓の平野から、山の頂上の位置と高さ（海抜）を測る：
このとき条件としては、平野のある広さの場所から山が望め、その地点の海抜は分かるとする（平野なので同じとしてよい）。私たちは図を描いて、幾つかの地点から観測して山の頂上（これも点で表される）の 3 次元的な位置を求める幾何の問題に帰着させることができる。これは立体幾何のモデル（多角錐）で考えることになる。

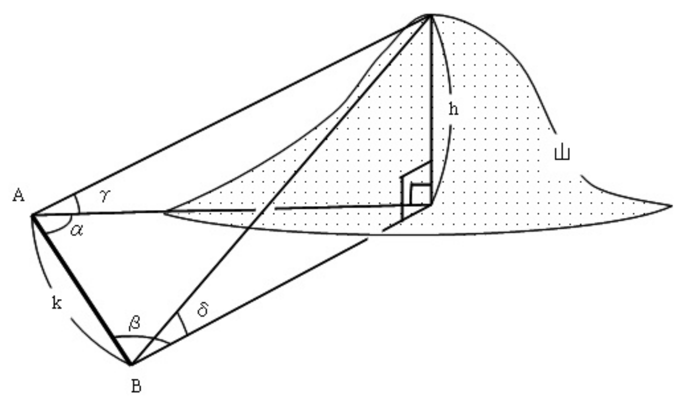



**図 4　山の測量図**

---

[51] 森有正の言葉を借りれば、問題を解決するという体験が自己の「経験」にまで深まってこそ、自らにとって問題を解決した意味があると言えよう。逆にそのような深まりをもたらす問題こそが大事な問題なのである。

［問題 2］鶴と亀とが併せて 100 頭いる。その足の数は合わせて 272 である。鶴亀はそれぞれどれだけか（坂部広胖『算法点竄指南録』）

有名な「鶴亀算」の問題である[52]。これを有名にしているのは、むしろその解法の面白さであるが、数学（代数学）はもう 1 つの考え方を教える。つまり「分からない数をとりあえず何か文字で表して、分かっている条件を書き下せ」と。そこで亀を $x$ 匹、鶴を $y$ 羽とすれば、与えられた条件は $x + y = 100,\quad 4x + 2y = 272$ となり、これから $x, y$ を求めるのが問題である。これは連立 1 次方程式の問題（モデル）に帰着されたことになる。

ここでの例はいずれも求めるべきものが数値としてはっきりしているが、多くの場合、どう数量化するか、というところから考えなければならない。あるいは幾何の問題であれば、考える対象がどんな図形になるのか、数量の変化の問題であればどんな関数で表されるのかといったように、求めるべきものも様々の概念あるいは性質になる。さらに、例えば人の顔や指紋の認証ではその人であるかどうか、という判断を下すことが求められる問題では、どのように数学的に定式化するか、どのような数理モデルを考えたらよいか、つまりはどのように「数学化」したらよいかがすでに大きな数学としての問題なのである。

### 3.2.3　数学内での問題解決の方法

問題が数学の言葉で言い表されたとして、それを解決する方法はまず既存の（自分が既知の）数学理論が適用できるかどうかを見ることである。

上の問題で言えば、問題 1 では、水平面が麓の平野の地表として定まっているとすれば、（位置の分かった）平野上の 2 地点から山の頂上の（立体的な）方角が定まれば頂上の空間的位置は決まることが分かる。問題 2 では、標準的な 2 元連立 1 次方程式で、その解法はよく知られている。第 2 章「数学の世界 A」で述べたように、数学は多くの問題に答えられる広範で深い知識の蓄えを持っている。

では、そうした解法がすぐ見出せない場合に私たちはどう考えていくだろうか。その方法としては、答を予測し、関連する解決済みの問題を探し、それがなければ新たに解法を考えることになる。

このやり方は一般的な問題解決の方法と基本的に変わらない。ただ数学の場合、数学語の持っている論理性と抽象性から、そうした方法が類型的に比較的はっきり見えるということはあるかも知れない。以下、幾つかの場合について具体的に見よう。

１）解の予測　求めるものが数値であれ、関数あるいは何かの性質であれ、それを何らかの仕方で予測することが大切である。ここでは科学の実験と同じで、実例の計算が有効である。現在はコンピュータの発達によって、この手法が強力な手段を与える。むしろそこで新しい性質が見出され、新たな問題そのものが提起されることも珍しくない。普通の場合には、条件を簡単にしたりしてその様子を見る。

[52] 鶴と亀の問題としての初出（1815）。類題としては、古く雉と兎の問題として中国の『孫子算経』（5 世紀以前）に遡る。

例えば $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ を求めるのに、最初の方を計算してその増え方を見ると大体 $n^2$ と同じようであることが分かる。具体的には両者の比 $S_n / n^2$ を取ってみるとだんだん 1/2 に近付くことが見て取れる。これから $S_n$ が $n$ についての 2 次式として書けるのではないかと予測できる。

図形や関数の問題の場合には、正確な図やグラフを描いてみるのは、答を見出す大切な方法である。それによって 3 直線が 1 点で交わったりとか、あるいは値があるところで極値を取ったりといった事実が観察できる。3 直線が 1 点で交わるというような状況は偶然に起こることがまず考えられないので、比較的少数の例でその正しさを確信できる。これに対し、値の変化（増大・減少）などは予測に慎重でなければならない。

数学は最終的に演繹的推論によって正しさを保証されなければならないが、解そのものやそこに至る方向を見出したりする上では、こうした帰納的な考え方もきわめて重要で、頻繁に用いられる。

２）推論　問題解決の主要な考察は、条件を様々な角度から分析し、それらを総合することである。このときには条件から出発する演繹的な考察だけではなく、予想される解から逆に戻ってくる考察、あるいは幾つかの例を総合して考える帰納的な考察など、あらゆる方法が使われる。最終的には条件から結論に至る演繹的推論で結ばれた道筋を見出さなければならないのであるが、見出すための順序はどのようでもよいし、当てずっぽうでそれらしい道に飛んでも（あとから補完すればそれで）よい（発見的考察 heuristic argument）。

こうした推論を進めていくのは、形式的な計算や演繹的推論はもちろん必要で基本であるが、それだけでは多くの場合道筋が見えない。幾つかのアイデアが必要である。

上の問題で、和が 2 次式であろうと予測したところですでにある意味ではアイデアが入っているが、2 次式であると仮定すると、最初の 3 項を計算することでその 2 次式は $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ でなければならないことが分かる。あるいは 2 次式であるとの仮定と漸化式 $S_{n+1} = S_n + (n+1)$ からも同じ結論が得られ、この場合には（$S_1 = 1$ を併せれば帰納法による）証明にもなっている。2 次式という予想なしでも、この和についてはガウスのエピソードでも名高い[53]

$$2S_n = (1+n) + (2 + (n-1)) + \cdots + ((n-1) + 2) + (n+1) = n(n+1)$$

という考え方で直ちに答が得られる。この他にも三角数として幾何的に表示して求める方法などいろいろある。

補助線　アイデアの例として数学で代表的なものに幾何学における補助線がある。ある幾何学的な性質を証明するのに、当初の図にはない直線や円を描くとそれによって証明の道筋が直ちに見えてしまうのである。有名なものの例として、三角形の内角の和が 180° であることの証明と、ピタゴラスの定理の証明とに現れる補助線を

[53] ガウスが小学生の時、1 から 100 までの和（$S_{100}$）を求める問題を算数の教師から出されてここに記されたアイデアでたちまち解いてしまったというもの。歴史的信憑性はない。

示しておこう。前者では平行線の性質、後者では三角形の合同を経由することによって証明が与えられる。

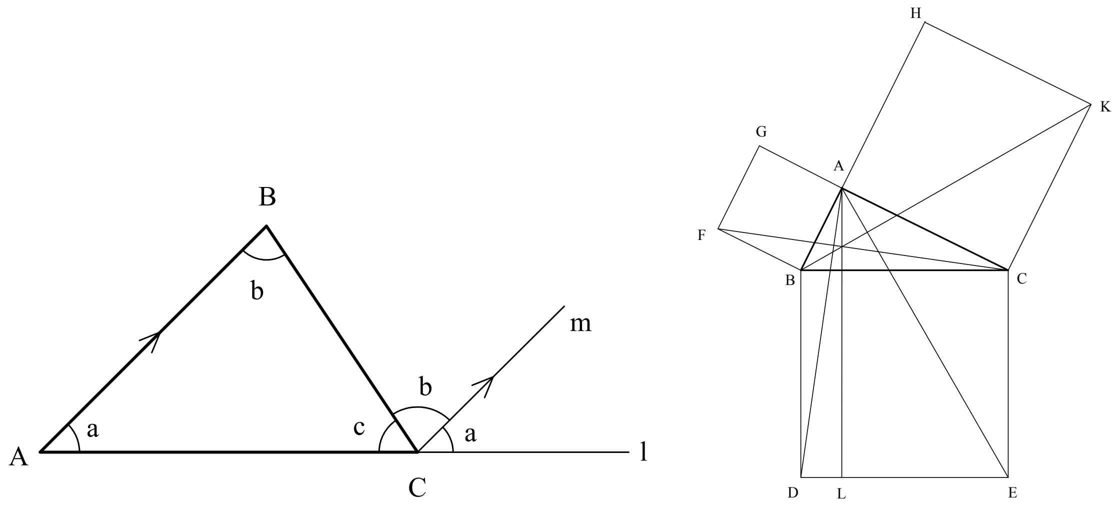



**図 5　三角形の内角の和が 180°であることの証明とピタゴラスの定理の証明**

３）一般化　問題を解く場合、具体的な数値で考えた方が解きやすいかというと必ずしもそうではない。その具体性に幻惑されて、かえって問題の本質が見えなくなる場合も多い。例えば 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を数値的に幾つも解いたからといって、解の公式が推測できるわけではない。この公式は歴史的にはおそらく $y=x+\dfrac{b}{2a}$ と変数変換すれば、1 次の項が消えて完全平方の形になることから得られた。なおグラフを描くとこの事実はグラフが線対称になることからもっとはっきり意味が分かる。これらは 2 次方程式あるいは 2 次関数を一般的に考えることで分かるのである。

もう 1 つの例として等比数列の和がある。これは実際の数値計算ではなかなか答が想像つかないが、公比を文字 $r$ で表してみると（ $a$ は初項）

$$T_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

$$rT_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + ar^{n+1}$$

となって、上から下を引くことで直ちに答が得られる。

４）拡張　ある操作をしたり、ある概念を考えることが、途中でできなくなる場合、それらを拡張することで乗り越えることが数学ではよく行われる。自然数では引き算ができないので負の数を導入して整数に拡張する。整数ではまだ（余りのない）割り算ができないので、分数を導入して有理数に拡張する。実数では $x^2+1=0$ が解を持たないので、その解 $\pm i$ を付け加えて複素数へと拡張する、等々。

しかしこうした拡張を行う場合には、対象の拡張だけでなく、限界となった概念そのものの見直しも同時に行われている。例えば最初の引き算の場合、自然数での引き算は幾つかのものを「取り去る」という考え方である。だからこそ取り去るものがなくなってしまった場合（0 になった場合）それ以上進まないのである。これに対し引

き算を加法の逆演算、つまり$a$ から $b$ を引くとは $x+b=a$ となる $x$ を求めることであるとして初めて整数への拡張が自然に可能となる。また $-(-a)=a$ も納得される[54]。

この概念の転換がきわめて大きく、全く想像を超える場合もある。例えば「ベクトル」は力や風などの強さと方向を表す概念（幾何ベクトル）として物理的な場から導入されたものである[55]が、座標を用いることで位置ベクトルを経由して単なる数の組 $(x,y)$ と同一視されることとなった（数ベクトル）。

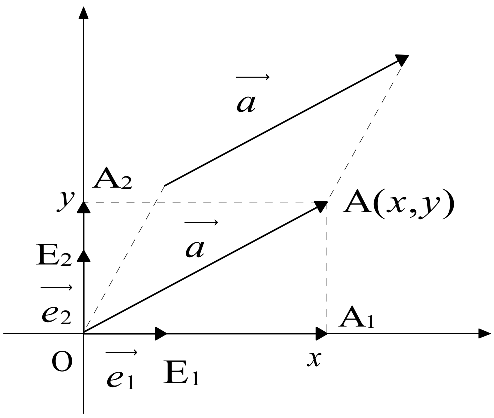



**図 6　ベクトル**

しかしこの転換によって私たちはいとも簡単に空間は3次元までという限界を乗り越えて、一般の $n$ 次元空間を考えることができるようになった。つまり $n$ 個の数の組 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を考えればよいのである。現在ではさらに進んで（加法とスカラー倍との 2 つの演算を持つ代数系という）抽象的なベクトルの捉え方が一般的になり、これによって私たちは無限次元の空間の中で数学を考えている。このように一見全く違うものが本質的に「同じ」であると見抜いてしまうところに数学の発想の「自由さ」がある。

５）類推・並行性　問題を考えていく上で、似たような別の問題で、解が知られていたり、もっと簡単に解けるものを見出すことは最も有効な手法の 1 つである[56]。

例えば、上で空間を $n$ 次元に拡張したが、そこでの図形は 2,3 次元からの類推で考える。例えば $n$ 次元での単位（超）球面は

$$S=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n);(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_n)^2=1\}$$

と定義すればよい。この考え方で面積や体積を一般次元で計算することができる。

これは比較する問題の背後にある数学的な構造にある種の共通性を認識している

---

54　厳密に言えば、さらにそれが可能となる数学的なモデルが「存在する」ことを示さなければならない（「存在定理」[3.1.4]の必要性）。

55　もちろん「平行移動」としてユークリッド以来知られていたが、ベクトルという一般的な枠組みでは理解されていなかった。同じように加法乗法は古くから知られていても、「群」の概念はずっと新しい。

56　学問としての数学研究における「アナロジー」の重要性を指摘した論考に A.ヴェイユが妹 S.ヴェイユに宛てた手紙がある[Weil]。

ことになる。そうした共通性が当初から明らかでないこともあり、その場合はそれを突き詰めることで新たな抽象的概念が得られる場合がある。先に述べた抽象ベクトルはそうして得られたものである。

これと密接に関連した重要なものに「並行性」がある。すなわち異なる概念の元にある 2 つの世界そのものの構造に類似性があって、対応関係があるというのである。これは数学の宇宙そのものが持っている構造であって、数学の豊かさの源泉であると言ってもよい。

その第 1 は数の世界と図形の世界との並行性である。これを最初に指摘して用いたのはデカルトで座標幾何学がそれを実現した。上に述べた幾何ベクトルと数ベクトルとの対応はその例である。

その第 2 は離散的世界と連続的世界の並行性である。数列と関数、級数と積分、差分と微分といった対応関係があって、その類似と相違の認識は数学の理解に重要である。確率統計の分野でも離散分布と連続分布の関係は大切である。さらに言うならば、量子的な世界は離散的であり、私たちの日常世界は連続的である。

第３の例として、ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何を挙げよう。後者は、ユークリッド幾何での平行線の公理などを変更して得られる。当初、人々は平行線の公理が他から証明できると予想して、平行線の公理を否定した幾何学を、ユークリッド幾何学に倣う形で並行的に構築していった。しかし矛盾は出ず、完全に並行した理論が成立する非ユークリッド幾何学の存在が分かった。分かってみると、従来から知られていた球面三角法の諸定理はこの並行性の表れであることが理解された[57]。そして上の量子的な世界と逆に、光速に近い大きなスケールになると時空は平らでなくなるのである（相対性理論）。

他にも線形代数方程式と線形微分方程式、円関数と楕円関数の並行性など重要なものが幾つもある。

#### 3.2.4　解の記述、解の吟味

さて、首尾よく数学の問題としての解が得られたとすると、最後にこれを記述することになる。ここで 2 つのステップがある。すなわち

・数学の中での問題解決として（数学向けに）答を記述する；

・得られた数学としての解を本来の問題の解として言い直す。

１）数学としての解の記述

まず前者であるが、求めるもの（数値など）が得られたとして、それを記述するだけが解ではないことをまず強調したい。その答がなぜ、どのように得られたのか、その道筋まで含めてきちんと記述されていなければ答とは言えない。数学の計算問題で最後の数値や式だけ記して、それが合っていてもそれは答ではない。途中の経過が読むものに理解できるように書かれていて初めて答なのである。それは、問題の解答は、

57　球面三角法の公式は複雑だが類似性があり、三角形の辺の長さを 0 に近づけるとその極限として平面三角法の公式が得られる。

自分がその答を得たこととともにその答がなぜ正しいかを人に伝えるものだからである。

このためには、まず問題をはっきりさせ、その前提条件を明確にし、そして得られた最終解答をきちんと記述することが必要である。一般的な形の問題の解として得られていれば、それは多く定理の名で呼ばれる。数式の場合には公式と名付けられる。

その結果の理由を述べる部分は「証明」と呼ばれる。証明部分は、先に述べた演繹的推論に従っていなければならない。しかしすべてを書き下す必要はなく、むしろ想定される読者の知識に適合する形で、適宜省略を行って、大切なアイデアや議論の流れを明確にする方が分かりやすい（cf.[3.1.4]）。

計算問題の答の場合には、その計算の道筋やアルゴリズムを与え、それが新しい場合にはその妥当性も含めて説明する必要がある。

本節冒頭の鶴亀算（問題２）の場合、引用した本には答の求め方として「頭数（100）に亀の足の数（4）を乗じ、実際の足の数（272）を引いた答え（128）を亀と鶴の足数の差（2）で割って得られる数（64）が鶴の数である」と記されている。これは先に書いた連立 1 次方程式を消去法で解くアルゴリズムそのものである[58]。

２）当初の問題に対する解答への言い換え・解の吟味

問題が現実の様々の事象から取られ、それを数学化して考えた場合には、得られた数学としての答を元来の事象のそれに言い直す必要がある。

本節冒頭の山の位置と高さを求める問題（問題 1）の場合には、実際に幾何的なモデルに基づいて測量を行い、最終的な数値を得る必要がある。幾何的なモデルは三角法を用いた計算の仕方を与えるが、同時に何を測らなければいけないか、その条件もはっきりさせる必要がある。もし 2 地点から山頂への方向を測るというモデルを取るのであれば、必要な情報は、１）その 2 地点の位置、特に 2 地点間の距離；２）2 地点の高さ（海抜）［今等しいとした］；３）2 地点を結ぶ線分を基準としたそれぞれの地点での山頂の方向への角度；４）2 地点から山頂への仰角、である。

さて、数学理論としては解決したのであるが、現実の問題としてはまだ終わりではない。こうして得られた数値がどの程度の精度を持っているかを明らかにしなければならない。測定値は必ず誤差を伴うからである。この問題の場合、2 地点を十分距離を置いて取れば位置情報に関してはかなり良い精度の値が得られるが、仰角は小さいので、高さの精度を良くすることはなかなか難しい。

鶴亀算の場合にも解の吟味が必要である。もし答として負の数が出てくれば、それは不適当なので、元来の問題については解なしとしなければならない[59]。

３）反省（フィードバック）

当初の問題への答が得られたとして、さらにその解法を批判的に検証し、更なる進展の可能性について、数学自身としての問題解決の意味をも含めて考え直すことは重

58　和算の本では、このように計算の仕方は記すが、その理由（証明）は書かれないのが普通である（[4.9]）。

59　数学内部の問題としても、対数方程式では真数条件をチェックする必要があり、三角方程式でも三角関数の値の絶対値が 1 を超える解は棄てなければならない。

要である。

まず数学化の段階、すなわち採用した数理モデルが適当であったか、その限界はどこにあるか、といった検証が必要である。問題 1 について言えば、観測地点を増やすことで精度を上げることができる。またおそらく現在の技術では距離を直接測る方法が使える。前者は数学内の（ただし近似計算の）問題であり、後者は数学外の（技術の）問題である。

次に数学の問題として、もっと一般化する、あるいはより理解を深めることが可能かどうかの検証がある。1 から $n$ までの和 $S_n$ を求める問題では、この解法を振り返ることにより、一般項が $n$ についての（$d$ 次）多項式で書けるような級数であれば、その和は （$d$+1 次）多項式で表せることが分かる。そしてこれは離散と連続の並行の表れとして、（$d$ 次）多項式の積分が（$d$+1 次）多項式になる事実と対応していることが注意される。こうした反省が自己の知的体系の更新となるのである。

最後に 1 つ注意しておきたい。上に述べたプロセスは数学以外からの問題を解決することを想定しているが、数学教育では、数学内でこうした思考プロセスを訓練している。特にいわゆる記述式問題は、通常言語で書かれた内容を数学の言葉に翻訳する過程を含んでいる。中でも初等幾何学、特にその証明問題では、与えられた情報の中から適当なものを選び出し、場合によってはさらにそこに書かれていない情報を追加して（補助線を引く）、解答に至るという、問題解決の訓練の場としてきわめて優れたものになっている。この意味で知的体系そのものを確立する（訓練用）モデルとして数学、特にユークリッド幾何学は今も大きな教育的意味を持つと言えよう。

# 第 4 章　トピックス

## 4.1　論理的思考力

数学的知識を日常的に職業に活かしている、という人は比較的少数であろう。では、そうでない人々が数学を学ぶ必要はあるのだろうか。

たしかに、「数学」を各単元において学ぶ個別の知識、たとえば三角関数の加法定理のようなものの集積と考えるならば、数学から個人が受ける恩恵はごく限定的なものになるだろう。ただし、数学を、数学の知識と、数学的な「構え」の両者を含むものと考えるなら、数学は個人が幸福に生きているためのスキルとして不可欠なものとなる。それは、われわれの住む社会が、情報量と選択肢の多い現代の民主主義社会だからである。われわれには職業選択や住む場所を選ぶ自由があり、自分の時間を自分の意思で分割して使う自由がある。どこかに行く場合には移動手段を選べ、豊富にある商品から自由に選ぶことができ、今手持ちのお金がなくてもローンで買い物をする自由さえある。そのような社会とは、自分が幸せになるために合理的な判断ができる個人を前提とした社会なのである。それだけではない。行政・司法・立法に責任をもって参加する個であることを前提に、民主主義は成り立っている。つまり、われわれは、論理的思考力を身につけて、民主主義国家に責任ある主体として参加することが望まれているのだといえよう。

論理的思考力の中で、ここでは特に、①問題の構造を的確に捉える力（論理的に読み解く力）、②筋道を立てて考える力（論理的に考える力）、③論理的整合性のある表現をする力（論理的に表現する力）の 3 つの要素を挙げたいと思う。

われわれを取り巻く問題は、最初から、数学の文章題のような形で現れるわけではない。まずは、「問題の構造を的確に捉え、それを解決可能な形に変形する」という作業が必要になる。たとえば、家計のやりくりを論理的に捉えるならば、定まった収入の中で、それぞれに優先順位や効用といった重みのついた支出項目の最適な組み合わせを求める方程式を解いている、ということだろう。一方、家計のやりくりをそのように論理的に捉えることができず、財布にある金の範囲でそのときどきに好きなものを購入するだけの人々もいる。問題を的確に捉え、解決可能な形に変形する能力を常から有しているかどうかは、生活の質を大きく左右するといえる。

地球環境問題のように複雑かつ大規模な問題を捉える場面では、その問題に付随する莫大な情報を取捨選択する能力も問われる。その際、数学的素養が十分にない人々は、情報量の多いものにひきつけられ、選択してしまう傾向がある。たとえば、音声付動画の情報はテキスト情報に比べて、数十万倍の情報量となる。同じ画像でも白黒とカラーでは、情報量に大きな差がある。情報量が大きなものに判断が左右されるのも無理はない。このようなときに、数学を通じて培う、問題の見かけに惑わされずに構造を見抜く力が役に立つであろう。

問題の構造を的確に捉える力を養うには、現実問題に多くあたらせることが必要と

なる。そのためには、理科や社会科あるいは家庭科などの科目と連携しつつ、数学的に問題を捉えるトレーニングを繰り返し行うことが望ましい。また、数学の中においても、自然な言葉で書かれた問題を数学的に捉えなおして問題として設定しなおすトレーニングも必要となる。このような問題意識は PISA の問題設定からも強くうかがわれる。

こうして、問題を論理的に捉えた後、いよいよ「筋道を立てて考える」ことを通じて問題解決を図る。筋道を立てて考える方法としては、主として「帰納的推論」と「演繹的推論」の二種類が挙げられよう。帰納的推論とは、過去のデータや例などからある傾向を見出し、そこからベストと思われる解を選択する推論の方法である。帰納的推論が必ず正しい解に導いてくれるとは限らない。しかし、正しい解を予測する非常に効果的な方法だといえる。

一方、演繹的推論とは、前提から結論を正しく導くための方法論である。この場合、前提が正しければ、結果が正しいことがあらかじめ保証されている。逆に、結果が明らかに間違っている場合には、前提がそもそも間違っていたということを示すことができる。つまり、演繹的推論は、何が正しいかを判断するための方法論だといえる。

さて、こうして論理的に推論する方法を身につけて、個人がそれぞれに問題を解決できるようになれば万事ＯＫだろうか。そうではない。問題どのように解決をしたか、また、なぜその解決方法が正しいかを他者と共有できる状態にすることができなければ、せっかく問題解決をしたとしても、その意味を失うことも多いからだ。ここにおいて、論理的に表現する力が求められる。問題をどのように捉えたか、そしてどのような方法で解決したか、その結果はどうであったか、などを的確かつ論理的に、そして第三者の納得が得られるような形で効率よく表現できることが望ましい。

問題は、個人で解決するものとは限らない。いや、むしろ、問題は往々にしてグループで、あるいは社会全体で取り組む場合のほうが多いだろう。そのようなとき、出発点である問題を共有するだけでなく、思考の過程をいかに共有するかが、問題解決の質や効率を左右する。このときにも、やはり論理的でわかりやすい表現をする力が求められる。そこに、言語としての数学の果たすべき役割がある。

現在、数理科学で用いられている式・アルゴリズム・証明などの表現方法は数学発生のときから存在したわけではない。文化や時代背景によらず、最も誤解が少なく、しかも効率よく、複雑な概念を伝達するための表現手段として数千年かけて整備されてきた、いわば人工言語なのである。記数法や数学記号は、概念をコンパクトに伝えるために発達してきた。証明は、真理にたどり着く道筋をゆらぎなく伝達する手法として整備されてきた。しかし、こうした「数学語」の表現方法は数学に留まらず、論理的な枠組みを必要とするあらゆる分野で活用されている。

以上、論理的思考力を①読み解く力②考える力③表現する力という３つの観点から述べた。論理的思考力による課題解決と知識共有ができる個人が求められる現代社会においては、これらの能力を備えているかどうかで個人の職業の選択の幅、生活の質は大きく影響される。子供たちひとりひとりにこれらの力をしっかりと身につけさせ

るような教育が求められる。個人の幸せだけではない。多様な文化背景をもつ人々が参画する国際社会全体にとっても、論理的思考力は必要不可欠な社会基盤だといえるのである。

### 4.2　命数法・記数法

動物にもある程度数の概念があると言われるが、人間は言葉を持つので、さらに数に名前を付け、数の範囲を拡大していった。このやり方を命数法と言う。これに加えて人間は数を記録する方法（記数法）をも作り出した。特にアラビア数字による位取り記数法は、私たちがふだん何気なく使っているものであるが、極めて優れた便利なもので、人類最大の発明の 1 つと言っても過言ではない。

#### 4.2.1　命数法

数詞はおそらく人類の言葉の歴史と共に古く、民族によって様々のものがあるが、多くの言語では基本的に十進命数法を取っている[60]。これは 1 から 9 までの数詞と、「十」「百」「千」などの位を表すことばとそれらの並べ方で掛け算や足し算を表すことにより数を表すものである。例えば「三百六十五」といえば、これは「さん(3)×ひゃく(100)＋ろく(6)×じゅう(10)＋ご(5)＝365」を意味する。

この仕組みによって、位の名前を付けさえすれば、いくらでも大きな数を言い表すことができる。実際『塵劫記』などにある「無量大数」という位は 65 桁（本により多少違いがある）の数を表す。またこの位の名称を用いることで、その数がどのくらい大きな数であるかのイメージを持つことができる。しかし私たちが普通使うのはせいぜい「兆」くらいまでで、それより大きい数は「次元」の違う数として、数を測る単位の方を変えるのが普通である。

ほとんどの言語で十進命数法は確かに基本であるが、実際には、12 進法や 20 進法などが様々の形で残っており、数の「名付け方」としては複雑になっていることが多い。英語の “eleven(11)、 twelve(12)”はその代表的な例である。日本語でも古くからの「大和言葉」にはそうした名残があるが、実用的には中国から導入された完全な十進命数法が用いられており、算数の学習で数やその計算の仕組みを生徒達が理解するのを容易にしている。

#### 4.2.2　記数法

実用あるいは文化としては、数を「記録」することがより重要になる。素朴には 1 つごとに線を引いたり、○を書いたりといったシンボルによる表示が用いられたが[61]、組織的に数を表す必要から、「数字」を用いた記数法が生まれた。

当初は 1 または位を表す文字を数だけ並べ、その総和として数を表すこととしたが、

---

60　日本語には「ひいーふう」「みいーむう」「よーや」という独特の数の対応関係が残っている。

61　漢字「一、二、三、十」などにはその名残がある。日本の「正」の字を用いて数を数える仕方は今も有効である

これでは数が大きくなるにつれて（1）数字が長くなってしまうこと；（2）何種類もの文字が必要になること；（3）計算が複雑になることなどの欠点が目立つようになる。例えば　$2637+3948$　をローマ数字

$$\mathrm{MMDCXXXVII}+\mathrm{MMMDCDXLVIII}$$

を用いて計算してみるとよい。掛け算はもっと大変であり、割り算はほとんど不可能である。

これに対し、今日私たちが用いているのはインドで考え出され、アラビアを通してヨーロッパに広まった「十進記数法」と呼ばれるものである。これは、一から九までを表す 9 個の数字（「アラビア数字」または「算用数字」とよばれる）と、空位を表す「0」の記号を用い、位は右から何番目の数かという位置によって表すという数の表現法である。上の例で言えば

$$2637=2\times1000+6\times100+3\times10+7$$

と書かれている。

この記数法の利点はローマ数字などの問題点と比べて明らかである：（1）桁の数だけの長さで数が表される；（2）10 種類の数字だけでよい；（3）計算がきわめて容易になる。すなわちこれによって四則計算のアルゴリズムを確立することができる。これに加えて、（4）理論的にはいくらでも大きな数を表すことが可能である；（5）2 つの数の大小がすぐ分かる。特にその桁数を見る（記された数の長さを知る）ことで、その数のおよその大きさが視覚的に分かる、などの利点がある。数の最も大切な性質は、四則演算ができることと大小関係があることの 2 つであったから、十進記数法がこれらとの整合性を持つこと（上記（3）（5））はこの記数法の最も大きな利点であると言える。

四則演算のアルゴリズムは、筆算という計算方法を生み、確立した。この十進法による筆算の方法には、（1）任意の数の計算が望むだけの精度で確実に行える；（2）方法が分かりやすく、誰でも実行することができる；（3）計算の手間が飛躍的に減少した；（4）誤りのあることが分かったとき、容易に検証できる、などの優れた点がある。先に挙げたローマ数字の例を十進記数法を用いた筆算で行ってみれば、その差が実感されるであろう：

$$\begin{array}{r} 2\ 6\ 3\ 7 \\ +\ 3\ 9\ 4\ 8 \\ \hline 6\ 5\ 8\ 5 \end{array}$$

日本で十進記数法と筆算が導入されて広まったのは明治時代のことであるが、それ以前には算盤が広く普及して用いられ、そこでは実質的に上に述べた十進記数法と筆算の利点がすでに実現されていた。これは江戸時代の高い識字率と併せて（読み書き算盤）、日本の教育水準、ひいては国力を高めており、明治以降の日本の「近代化」がきわめて速やかに進行した要因の 1 つとなっている。算盤とその利用は日本が世界に誇るべき文化の 1 つであると言えよう。

### 4.2.3　ｎ進法と計算アルゴリズム

コンピュータは大きな数と多量の計算を行うが、ここでもこの位取り記数法の考え方と筆算の計算アルゴリズムとが使われている。ただしコンピュータでは数を数えるのに十進法でなく、２（またはそのベキ）進法が用いられる。

２進記数法では、掛け算が「1 つ桁を左にずらす」（２を掛ける）ことと足し算のみで実行できる。掛け算では足し算に比べ数が大きくなるとその手間（計算量）が飛躍的に増大するが、コンピュータ計算では、この事実などを用いて、掛け算をより簡単に（短時間で）行う様々の工夫が行われている。

コンピュータや電卓の普及により、学校で筆算の練習をする必要はもうないのではないかという意見がある。確かに実際的な筆算の必要は減じているが、一方で定まった手続きによって知的な作業を省力化する「アルゴリズム」の大切さは増大こそすれいささかも減じていない。そのアルゴリズムの最も典型的な例である十進記数法の四則計算アルゴリズムをその仕組みの良さの理解と共に身に付けることは大切な数学リテラシーであると言えよう。

## 4.3　無限

コンピュータがなお人間に及ばない、その最大の違いは「想像力」であろう。数学でその想像力を働かせなければならない典型的なテーマの 1 つが無限である。古代から、人間は様々の仕方で無限を考えてきたが、数学の進歩とともに「無限」の認識も深まって、数学的に厳密な扱いが可能になってきた。

### 4.3.1　無限とは

無限とは何だろうか。答は簡単で、「有限でない」ことである。例えば、無限個とは有限個でない、つまりどんな自然数 $N$ をとってもまだ数え尽くせない部分が残っていることである。無限大とは、どんな数 $M$ をとってもそれより大きいことである。例えばユークリッドの『原論』にある「素数が無限個ある」の証明は、有限個であるとしてその素数のリストに入っていない素数を構成することで矛盾を出すという背理法に依っている。

しかし人間は有限の世界に生きている。時間や空間は無限に続くものとされているが（永遠、無限遠）、私達の生きている時間には限りがあり、見たり聞いたりできる距離にも限度がある。無限については想像するしかない。

このため、無限を扱おうとするといろいろ難しいことが起きてくる。その困難を指摘した有名なものに「ゼノンの逆理」がある（後述）。ピタゴラス学派は有限の自然数の比として書けない数（無理数）の存在を知って、それを「数」として扱うことを止め、「長さ」の量を直接的に取り扱った。

また「ホテルのパラドックス」と呼ばれるものがある[62]：無限個の部屋を有するホテルがあって、満室であった。そこに 1 人の客が新たに来て泊まりたいという。そこ

---

[62]　「ヒルベルトのホテル」と呼ばれるが、出典がはっきりしない。

で支配人は最初の部屋のお客に移ってもらうことにしてそこに新来の客を入れた。そして移る客をその隣の部屋の客に移ってもらってそこに入れ、これを繰り返して新来客を加えた全員が部屋に入ることができた。

これは有限の場合には決して起こりえない。席取りゲームを考えれば、$N$ 個の席しかないところに、$N$ 人より多い人がいたとすれば、必ずどこかの席では二人以上の人が席を争うことになる。これは「ディリクレの抽斗論法」あるいは「鳩ノ巣原理」と呼ばれて数学での証明テクニックの一つになっている。

実は「ホテルのパラドックス」はパラドックスではない。それどころか、現代数学ではこのようなことが起こることを「無限」の定義としている。すなわちある集合において、自分自身とその真部分集合との間に一対一対応が存在するとき、これを無限集合と呼ぶ。無限の世界では、有限の世界では考えられない不思議なことが起こる。

### 4.3.2 無限の度合い

現代数学は無限にも様々の段階があることを示した[63]。

2 つの集合（ものの集まり）の個数が同じであるとは、それぞれの要素の間に一対一対応がついていることである。これを 2 つの集合は同じ「濃度」（cardinality）を持つという。例えば（ある地域のある時点での）夫の集合と妻の集合の個数は等しい[64]。ところで有限の世界であれば、ある集合の真部分集合の要素の個数は下の集合のそれより必ず少ない。しかし無限の世界では真部分集合と同じ「個数」を持つことが起こりうる（必ず起こる）。例えば自然数の偶数の集合は自然数全体の集合と対応 $2n \leftrightarrow n$ によって一対一対応が付く。このように自然数全体と同じ個数（濃度）を持つ集合を可算（無限）集合と呼んでいる。整数、偶数、奇数などの集合が可算集合であることは見やすい。さらに有理数が可算集合であることも示せる。

では実数全体はどうだろうか。カントールは実数が無限小数展開を持つことと、対角線論法と呼ばれる巧みな方法を用いて、実数全体は可算でないことを示した[65]。つまり実数は有理数より本質的に多い。

### 4.3.3 無限大

「無限大」の概念は関数と共に現れる。例えば関数 $y = \dfrac{1}{x^2}$ は $x = 0$ で無限大であるという。グラフを描くと、確かに $x = 0$ の近くで値がはみ出してしまって描くことができず、値は 0 のところで無限大になっているように「見える」。これはしかし有限のところの状況から、そう「想像して」いるのに過ぎない。$x = 0$ ではこの関数は値が定義できない。「$x = 0$ で無限大である」とはより正確には「関数の値が $x = 0$ に近

[63] 現代数学が無限の問題を正面から扱いだしたのは 19 世紀末のカントールあたりからである。

[64] もちろん一夫一妻制を前提とする。

[65] この対角線論法は重要で、（自然数論を含む無矛盾な）公理系にはその理論体系で証明できない定理が必ずあるというゲーデルの（第 1）不完全性定理の証明でも使われる。

付くにつれていくらでも大きくなる」ということである。つまりこれは $x=0$ という 1 点ではなく、その付近での関数の変化の性質を記述するものなのである。その意味でこれは動的な（dynamic）概念である。そこで普通は「無限大に発散する」という表現を用いる。冒頭で述べた言い方に従えば、どんな数 $M$ をとっても、$x$ の絶対値を十分小さく取れば、関数の値が $M$ より大きくなることをいう。

$y=x^2$ のように、$x$ が大きくなるにつれて値がいくらでも大きくなる場合には、「$x$ が無限大になるときに関数の値が無限大に発散する」という。

同じ「無限大に発散」でも、その発散する速さに違いがある。2 つの関数 $y=f(x), y=g(x)$ があって、いずれも無限大に発散するとき、もし $f(x)/g(x)$ がやはり無限大に発散するのであれば、$f$ は $g$ より高位の発散をするという。多項式関数は次数が高いほど高位の発散をし、指数関数は多項式関数より、多項式関数は対数関数より高位の発散をする（cf.[2.3.2]）。

### 4.3.4 無限小

「無限」の取り扱いで最も大切なのは「無限小」の扱いである。第 2 章で「無限小解析」の語を出したが[2.3.3]、その意味を説明しよう。数列

$$a_1=1, a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{3}, \cdots, a_n=\frac{1}{n}, \cdots$$

を考えると、$n$ が大きくなる（無限大になる）につれて、数列の値は 0 に近付く（ように見える）。数学的に厳密な定義としては、どんなに 0 との誤差 $d\,(>0)$ を小さく設定しても、十分大きい自然数を取れば数列の値が誤差の範囲に収まることであるとして、数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束するという[66]。この場合は実際に $1/d$ より大きな自然数を取ればそうなっている[67]。

1 を 3 で割っていくと、いつまで経っても終わらない。これを私たちは「無限小数」を用いて

$$\frac{1}{3}=0.333\ldots$$

と書く。これはしかし、よく考えると = の意味がはっきりしていない。数学的には、割り算を繰り返すことによって得られる数列

$$a_1=0.3, a_2=0.33, a_3=0.333, \cdots$$

が収束して、その値が 1/3 だという意味である。それによって初めて、よく問題にされる

$$1=0.999\ldots$$

という式の「正しい」解釈が得られる。すなわちこの等式は右辺の表す数列の値が「い

---

66 これは 19 世紀半ばにワイエルシュトラスが与えた数学的に厳密な定義であるが、考え方としては、どんな厳しい精度を要求されてもそれに応えることができる「理想的状態」が成立しているということで、工学的にはきわめて自然なものである。

67 そのような自然数が存在することは、実は実数の大事な性質の 1 つである（アルキメデスの原理）。

くらでも 1 に近付く」ということを意味するのである。この意味でいかなる無限小数も収束して、1 つの実数を定めることが示される。逆にすべての実数は有限小数または無限小数の極限値として表される。

ゼノンの背理で最も有名なものに「アキレスと亀」の話がある。足の速いアキレス（ギリシャの英雄の名）が亀を追いかける。アキレスが最初亀のいた位置に着いたとき、亀はすでに前に進んでいる。その進んだ位置にアキレスが着いたとき、亀はさらに前に進んでいる等々。したがっていつまで経ってもアキレスは亀に追いつくことができない、と。この背理を解く鍵は、確かに無限回のステップを踏んでもアキレスは亀に追いつけないが、それが「永遠に」を意味するとは限らないところにある。話を簡単にするために、アキレスは亀の 2 倍の速さで走るとしよう。アキレスが最初の亀の位置に 1 秒後に来たとして、そのとき亀は当初のアキレスとの距離の半分だけ前に進んでいる。するとアキレスは 1/2 秒でその進んだ亀の位置に来ることができる。当初からの経過時間は 3/2 秒である。同様に、次にアキレスは 1/4 秒で、次に亀が進んだ場所に来ることができる。当初からの経過時間は 7/4 秒である。同様に考えていくと、このステップを繰り返しても経過時間は 2 秒を超えないことが分かる。2 秒経てばアキレスは亀に追いつく。つまりゼノンの背理で言われている状況は 2 秒経過する前のことで、「アキレスは亀に追いつく前には亀に追いつけない」ことを言っているに過ぎない[68]。

## 4.4　円周率 $\pi$ と自然対数の底e

### 4.4.1　円と円周率

平面上の 1 点 O と正の数 $r$ を取るとき、O からの距離が $r$ となる平面上の点全体が作る集合を、O を中心とする半径 $r$ の「円」と呼ぶ。同様にして、平面ではなく、空間の中で定点 O からの距離が一定の値 $r$ である点の集まりを考えると、O を中心とする半径 $r$ の「球」ができる。円や球は直線と共に幾何学的に重要な対象であり、数学の世界の基礎的な構成要素である。

平面上の図形で、面積がある与えられた値となる図形はたくさんあるが、円はその中でも周の長さが最も短いという特徴を持っている。平らな板に水を落とすと水は丸くなるが、それはこの理由による。同様にして、空間図形で体積が一定で表面積が一番小さいのは球であり、風船が丸くなるのも地球や星が球形なのも、この事実に基づく。

円の直径は半径の 2 倍であり、円の直径と周の長さの比は、円の中心の位置や半径の長さによらず一定であり、この比を「円周率」と呼び、円周を意味するギリシャ語 *περιφερεια* の頭文字記号 $\pi$ を使って表す。したがって、半径 $r$ の円周の長さは $2\pi r$ と

[68] 一方、この話でアキレスは必ず亀に追いつくものと思ったら、それも誤解である。もしアキレスが「疲れやすい」性質で、亀より速いことは速いけれどもその速さがどんどん亀のそれに近くなるとすると、場合によっては永遠に追いつけないこともあり得る。

なる。円周率が 3 に近いことは、メソポタミアやエジプトなど古代文明の頃から知られていた。円周率 $\pi$ は、数学で出てくる定数のうち最も基本的なものの 1 つであり、数学や科学・技術の様々な場面で現れる。

円の周を $n$ 等分し、正 $n$ 角形を作る。

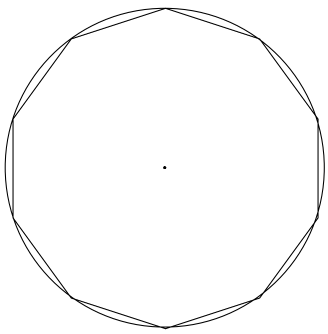


図 7　円に正 10 角形が内接

この図形は $n$ 個の三角形に分けられるから、その面積は、三角形の面積の公式より、

(1/2)×(正 $n$ 角形の周の長さ)×(円の中心から正 $n$ 角形の 1 辺まで下した垂線の長さ)

に等しいことが分かる。そこで $n$ をどんどん大きくすると、正 $n$ 角形は円に近づき、正 $n$ 角形の周の長さは円周の長さに近づき、中心から下した垂線の長さは半径の長さに近づく。したがって、

円の面積 ＝(1/2)× (円周の長さ) ×(円の半径)

となることが分かる。よって、半径 $r$ の円の面積は $(1/2)\times 2\pi r\times r=\pi r^2$ となる。同様にして、半径 $r$ の球の体積は $(3/4)\,\pi r^3$ であり、表面積は $4\pi r^2$ となることが分かる。

#### 4.4.2　円周率の値

円周率 $\pi$ の値は様々な方法で計算されるが、最もわかりやすい方法は、「円周の長さは、それに外接する正多角形の周の長さより小さく、円に内接する正多角形の周の長さより大きい」ことを使い、正 $n$ 角形の周の長さで近似するものである。半径 1 の円に外接正 $n$ 角形は、頂角が $2\pi/n$ で頂点から底辺までの高さが 1 の二等辺三角形 $n$ 個の和になるから、正 $n$ 角形の周の長さは、正接関数を使うと $2n\tan(\pi/n)$ となる。同様にして内接する正 $n$ 角形の周の長さは、 $2n\sin(\pi/n)$ となる。アルキメデスはこの方法を $n=96=2^5 3$ の場合に使って、$3.142\ldots\ldots = 3 + (1/7) > \pi > 3 + (10/71) = 3.140\ldots\ldots$ であることを示し、現在日本では、円周率の近似値として 3.14 がよく使われている。なお、円周率 $\pi$ の近似値は、その後インド、ヨーロッパ、中国などで計算されたが、日本でも関孝和、建部賢弘、松永良弼などの和算家が江戸時代に 50 桁までを計算している。

$\pi$ を表わす公式はたくさんあるが、次の公式が成り立つことがよく知られている：

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \ldots\ldots$$

この右辺の式はあまり計算には適さないが、これを改良した公式を使って、1873 年

W. シャンクスは $\pi$ の値を 527 桁まで求めた。最近では、円周率の計算はスーパーコンピューターの能力テストに使われており、小数点以下 1 兆桁以上まで求まっている。

$\pi$ を含む公式としては、L. オイラー により発見された

$$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + \ldots.. = \pi^2/6$$

も有名である。オイラーは左辺で 2 乗の代わりに任意の偶数 $2n$ 乗にした式が、$\pi$ の $2n$ 乗の有理数倍になることを見つけ、ゼータ関数

$$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + 1/5^s + 1/6^s + 1/7^s + \ldots\ldots$$

を発見した。

円周率を求めるには、これ以外にも色々な方法がある。例えば、乱数を使って $-1 \leqq x, y \leqq 1$ を満たす実数の組 $(x, y)$ をランダムにたくさん作り、そのうちどれだけが原点を中心とする半径 1 の円 $x^2+y^2 \leqq 1$ に入るかを求めると、その比率が

(半径 1 の円の面積)/(1 辺 2 の正方形の面積) = $\pi/4$

に近くなる。このような方法で未知な値を求める方法を「モンテカルロ法」と呼び、値を計算する良い方法が見つからない場合には、非常に役立つ。

### 4.4.3 指数関数と自然対数の底

$a$ を正の数、$m$、$n$ を整数とするとき、$a$ の $m$ 乗を $a^m$ で表し、その $n$ 乗根を $a^{m/n}$ で表す。そこで、$x$ を実数とするとき、$a$ の $x$ 乗 $a^x$ を有理数 $m/n$ を $x$ に近づけたとき $a^{m/n}$ が近づく値と定め、$a$ を底とし実数 $x$ を変数とする「指数関数」 $a^x$ を定める。

$a > 1$ のときは、指数関数 $a^x$ は、 $x$ が大きくなると値 $a^x$ も大きくなる。またこの関数 $a^x$ は、 $a$ が大きくなるほど $x$ が大きくなったときの増加の仕方が大きくなる。そこで、 $x = 0$ のとき、 $x$ を大きくすると同じ割合で $a^x$ が大きくなる数（つまり $x = 0$ での接線の傾きが 1 となる） $a$ を $e$ で表し、「自然対数の底」と呼ぶ。

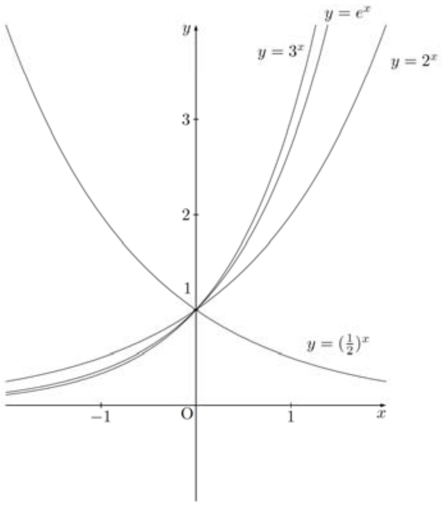



図 8 指数関数 $y = e^x$、 $y = 2^x$、 $y = 3^x$ 、$y = (1/2)^x$ のグラフ

定義より、指数関数 $y=e^x$ の $x=0$ での微分係数(接線の傾き)は 1 となる。また、指数関数 $y=2^x$ や $y=3^x$ のグラフを描くことにより、$2<e<3$ となることが容易に確かめられるが、$e$ の値は 2.718281828.... となることが知られている。さらに、$e$ と円周率 $\pi$ は、$i^2=-1$ となる虚数 $i$ を使うと、$e^{i\pi}=-1$ という関係を持つことがオイラーにより発見され、指数関数と三角関数が $i$ を介して $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ と結びつくことになった。

分数 $p/q$ ($p$、$q$ は整数、$q\neq 0$) の形で表わされる数を「有理数」と呼び、それ以外の数を「無理数」と呼ぶ。2、3、5 などの平方根が無理数であることはよく知られているが、$e$ も $\pi$ も無理数となることが知られている。

有理数 $p/q$ は 1 次方程式 $px-q=0$ の解となり、平方根を使って作られる無理数は 2 乗すると整数となり $x^2$ - (整数) = 0 の解となるが、これに対し、0 以外のどのような有理数係数の多項式に代入しても 0 とならない数を「超越数」と呼ぶ。このとき、$e$ や $\pi$ は超越数となることが知られている(エルミート 1873 年、リンデマン 1882 年)。ギリシャ時代には「与えられた円と同じ面積を持つ正方形を定規とコンパスで作図せよ」という問題(円積問題)が大問題となったが、リンデマンの結果から、約 2000 年後に円積問題は解けないことが分かった。なお、$e$ や $\pi$ を小数 2.718281828…… や 3.1415926535…… で表わすと、$e$ や $\pi$ は無理数だから、これらの数は、1/11=0.09090909……などのように同じ数の列が繰り返し現れることがないが、それ以上にこの展開の一部を「疑似乱数」として用いることが行われている。

## 4.5 対称性・不変性

### 4.5.1 対称な図形

図形にはその「種類」を決めたとしても、なお様々の「形」がありうる。その中で「特別な」図形、特に「美しい」図形と私たちが認識するのはどのようなものだろうか。

例えば三角形を考えてみよう。おそらく多くの人が「特別」とするのは、まず「正三角形」、ついで「二等辺三角形」「直角三角形」であろう。そして「美しい」とするのは正三角形ではないだろうか。少なくとも最も形の「整った」三角形であることは確かだろう。そして「二等辺三角形」は「少し整った」三角形と認識される。

こうした違いがなぜ生じるのだろうか。数学的に言えば、直角三角形は直角という「特別の」角度を持ち、二等辺三角形は(少なくとも)1 組の、そして正三角形はすべての辺や角度が「同じ」である。しかしさらに考えるとこうした感覚は、二等辺三角形は「裏返して重な」り、正三角形はそれに加えてさらに「(60°)回転して重なる」という事実に結びついている。辺や角度が同じになるのはその結果である[69]。

[69] 四角形で考えると、対称性を持つ四角形として、馴染み深い「正方形」「長方形」「菱形」「平行四辺形」に加え、「凧形」(対角線に関して対称な四角形)が現れ、「台形」は等脚台形のみになる。

このように、ある図形を動かしても下の図形と重なる（不変である）とき、その図形は「対称性（symmetry）を持つ」という。そして多くの対称性を持つ図形を「対称性が高い」という。二等辺三角形は「裏返して重なる」[70]という対称性を持ち、正三角形は 3 種類の裏返しと 2 種類の回転によって不変な、三角形の中では最も対称性が高い図形である。

同じように考えると、「正多角形」が対称性の高い特別な図形であることが分かる。

では平面図形全体の中で、最も対称性が高い図形[71]は何だろうか。それは円と直線である。円はその中心を中心とするあらゆる回転によって不変であり、直線はその方向に沿ったあらゆる平行移動によって不変だからである[72]。

そして自然の中に現れる図形の多くが対称性を持っている。例えば生物の多くの種の多くの部分は左右対称性を持っている。鉱物などの結晶も対称性の高いものが多い。人の生活の中に現れる紋章などの図形にも対称性が多く現れる。例えば「浮線蝶」は線対称性、「右二つ巴」は回転対称性を持つ。

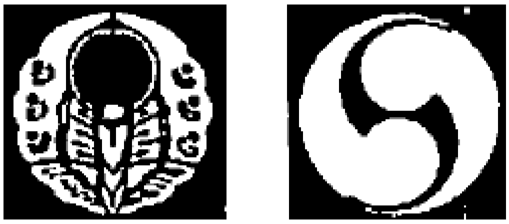


図 9　「浮線蝶」と「右二つ巴」[73]

### 4.5.2　対称式・不変式

「対称性」は数式にも現れる。例えば $x+y, xy, x^2+y^2$ などは $x$ と $y$ とを入れ替えても変わらない。このような式を対称式という。$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ と書けるように、実はすべての（2 変数）対称式は $x+y, xy$ によって表せるので、この二つを基本対称式と呼ぶ。同様に 3 変数の場合も対称式が定義され、$x+y+z, xy+yz+zx,$ $xyz$ が基本対称式となる。それ以上の数の変数でも同様である。

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解を $\alpha, \beta$ とすると、$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$ から $a=-(\alpha+\beta), b=\alpha\beta$ が分かる。これと $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2-4b$ （これは判別式であることに注意）とから 2 次方程式の解の公式が得られる。

また関数 $y=f(x)$ で $y=f(-x)$ をみたすものを偶関数、$y=-f(-x)$ をみたすものを奇関数という。多項式で偶数次の項のみを持つものは偶関数で、奇数次の項のみを持つものが奇関数である。前者は $x \leftrightarrow -x$ という「対称性」を持っているわけであるが、後者についても定数倍だけの違いなので広い意味での「対称性」を持つとみな

[70] 正確には、ある直線に関する線対称（鏡映）。
[71] ここで「図形」というときは、位相的に「連結」であることを前提にしている。
[72] 古代の様々な文化で、円は最も「完全な」図形とみなされた。
[73] 平凡社『大百科事典　14』1985、【紋章】図－日本の紋章。

す。このようにより一般の対称性を考え、それに関する対称性を持つ式を一般に「不変式」と呼ぶ。

### 4.5.3　対称性・不変性

上で対称性を持つ数学的な対象を考えたが、そこで分かるようにどのような「対称性」を持っているかも重要である。そこで数学ではこの「対称性」を独自の対象として考える。実際正三角形の持つ対称性は、3 つの頂点を自由に置き換えてよいことに他ならないので、3 変数の対称式が持つ対称性と全く同じである。数学ではこれを群とよぶ。今の場合は 3 つの文字を自由に入れ替えることで得られる対称性なので、3 次対称群と呼ばれる。そしてそれぞれの例はその対称性が実現されているものとみなす。ちょうど「数」が様々の「量」として現れるように、抽象的な「群」が様々の数学的な場に「対称性」として現れていると考えるのである。そしてその実現によって「不変な」数学的対象が「対象な」図形や式なのである。

歴史的には、方程式の解の持つ対称性の考察から群の概念が導かれた。その着想は若くして逝った天才数学者ガロアに負う。

### 4.5.4　理論の持つ対称性・不変概念

最初の幾何学の例で、図形の持っている対称性を考えたが、その場合一般の（いびつな）三角形の頂点を入れ替える変換は対称性と見なさなかった。すなわち平行移動、回転、鏡映（反転）およびその組み合わせのみを対称性の候補と見なしている。これらは平面幾何学で図形を重ね合わせるために「移動する」変換に他ならない。そしてこうした移動によって、図形の直線や円であるという性質、多角形の「形」、特に「長さ」「角度」などの量や互いに「平行である」という性質などは変わらない。

ところでこの移動は平面全体を平面全体に写すものであることに注意しよう。そこでこの「移動」の全体（2 次元直交群）を平面そのものの対称性、より正確に言えば（平面）ユークリッド幾何学という「理論」が持つ対称性と考え、上記の性質や量をこの対称性によって不変な概念あるいは不変な量と考えることができる。「相似な図形」という概念はもちろんこの変換で不変であるが、さらに拡大縮小という変換によっても不変である。このように「対称性」として考える変換の範囲を変える（群の範囲を変える）ことで、それぞれの対称性の下での「不変性」が考えられる。対称性を大きくすれば、当然不変なものは減り、対称性を小さくすれば不変なものは増える。このようにして様々な幾何学をその対称性の種類や範囲を考えることで分類し系統付けようというのがクラインによって『エルランゲン目録』の中で提出され、以降の数学（および物理学）に大きな影響を持った考え方である。この考え方に拠れば、豊かな理論とは、大きな対称性を持ちながら、しかも大切な不変概念が沢山あるもののことである。

### 4.5.5　自然は対称性の高いものを選ぶ

このように対称性は数学という抽象世界の中で生まれたものであるが、最初に述べたように自然の中にも沢山の対称性が見られる。

これは「安定性」（stability）と呼ばれる考え方で説明できることが多い。例えば結晶では結合エネルギーが極小（その組み合わせの付近では最小）となっていることが対称性を生む理由となっている。あるいは無重力状態にある水滴は完全な球になるが、これも同じ理由である。数学的に簡単なモデルでいえば、周長が一定の三角形で面積が最大のものは正三角形である。

クラインの考え方を物理学にも応用すると、ニュートン力学、（特殊）相対性理論はそれぞれ大きな対称性と豊かな不変概念を持っていることが分かる。ワイルはさらに無限次元の対称性を考えることで量子力学を捉えることを提唱した。これは現在の場の量子論における基本的な考え方となっている。そしてさらに現代物理学はその対称性の「破れ」が現在の宇宙を創り出したのだという考えに至っている。すなわち安定状態からの「ずれ」「揺らぎ」がダイナミズムを産み出すのである。

## 4.6 視聴率

### 4.6.1　視聴率の精度

「視聴率」という名の数値がときどきニュースに登場する。例えば、「2006 年末の紅白歌合戦の第 1 部の視聴率は 30.6%だった」というニュースである。この種のニュースについて数学的に興味深いことは、例えば関東地区 600 世帯というわずかな数で調べたデータを基にして、関東地区 1,702 万世帯でテレビを見ていた世帯の 30.6%がこの番組を見ていたとする論理と、視聴率の値が 1%増加した（あるいは減少した）ということで社会が大騒ぎする根拠がどういうものか、ということである。

単純な仮定を基にした確率計算でこの数値が数学的にどの程度信用できるかを評価しよう。関東地区の場合、テレビを持っていると考えられる 1,702 万世帯からおおむねランダムに 600 世帯が標本として抽出されている。ランダムとは、標本に含まれる確率がどの世帯でも同じになるやり方のことである。

この地区で、ある時間帯にテレビを見ている世帯の中で、ある番組を見ている世帯の割合が $p$ であるとしよう。一方、標本となった 600 世帯において、この時間この番組を見ている世帯の割合を $P$ としよう。$P-p$ が標本誤差、すなわち一部しか調べていないことによる誤差である。この誤差はどの世帯が実際に抽出されたかによって、確率的に変わる値、すなわち確率変数（random variable）である。

この誤差の二乗の期待値（取り得る値に確率をかけて加えたもの）、すなわち平均二乗誤差（今の場合は分散）が $\tilde{p}(1-p)/600$ であることは、数学の公式として分かっている。分母の 600 は標本の大きさ（sample size）、すなわち標本に含まれる世帯数である。

さらに確率論における漸近理論という数学によって、誤差がこの分散の平方根の 2

倍の範囲に入る確率がおおよそ95%であることも分かっている。その平方根の2倍の値は、

$p = 0.50$ のとき、±0.0408、

$p = 0.10$ のとき、±0.0245

である。つまり、視聴率が50%くらいのときは4%以上ずれることはあまりないが、2%ぐらいずれることはかなり頻繁に起こり、視聴率が10%くらいのときは2.5%以上ずれることはあまりないが、1%位ずれることは頻繁に起こることになる。

### 4.6.2 経時変化の意味

確率に詳しくない人はこの誤差を見て、視聴率というものはそんなに当てにならない数字かと考えるかもしれない。もしそう考えたら、その理解は正しくない。何故だろうか。

視聴番組監視機器を設置して現在と同じレベルでの調査が行われるようになってから、少なくもと10年が経っている。それ以前からも含めると非常に長期に視聴率調査が続けられている。ということは、例えば紅白歌合戦のように年に一度の番組に対しても、10年、20年のデータがある。

標本がランダムに抽出されている限り、1つ1つの数値に入る誤差は、正負大小において適当にバランスするものである。10年、20年という時間経過の中で凹凸があっても、全体としての減少傾向が見られたら、その傾向についての誤差は非常に小さい、すなわち減少傾向の確からしさは非常に大きい。

ある番組で、仮に10年の視聴率に

15.4%、14.7%、15.0%、12.7%、13.5%、9.2%、12.3%、11.2%、10.7%、9.2%

という変化があったとすると、これは視聴率が直線的に下降していることが疑われる。それでこの視聴率に最小二乗法で直線を当てはめると、勾配の推定値が –0.66%/年で、その標準誤差（推定値の標準偏差）が0.13%/年になる。おおよそ3年に2%の割で視聴率が低下していて、その精度は0.2%程度である。

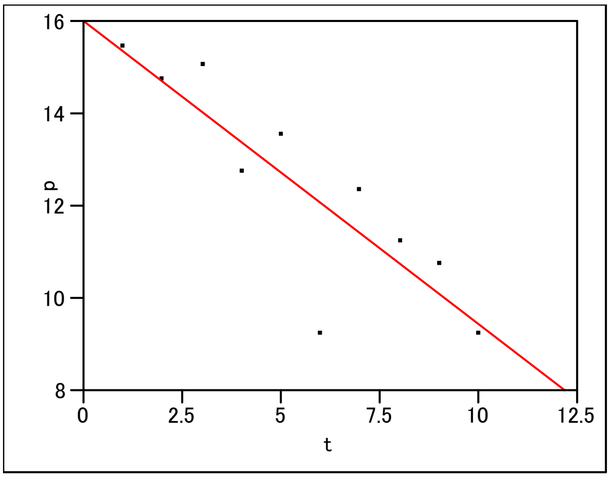



**図10　データにおける年 $t$ と視聴率 $p$ (%) の関係**

当てはめられた直線の式：$p = 16 - 0.6563636\ t$

この番組を同じ調子で翌年も続けるとさらに視聴率が低くなっていくことが予想できる。担当者としては、番組を中止するか、全く新たな企画で視聴者を引き留める手段を考えなければならなくなる。

紅白歌合戦は年1度であるが、多くの企画は週1回同じ形式での番組になるし、連続ドラマやスポーツ中継は毎日のようにある。この場合は2ヶ月も経つと、その番組の評価値についてはパーセントのオーダーで信頼してよい数値が得られる。

やはり単純な仮定として、10回の視聴率の値に入る誤差が互いに影響関係を持たない独立なものとすると、数学の公式で分散が1/10になる。1/10の平方根は約0.316であるから、

$p = 0.50$ のときの誤差幅は±0.0129、

$p = 0.10$ のときの誤差幅は±0.0077、

となり、視聴率はパーセントの単位で十分信用できることになる。

### 4.6.3 調査の偏り

多くの放送回数の結果を平均することで誤差が減るというこの論理には少しだけ注意すべきことがある。装置は世帯ごとに設置してあるので、そこに特定の連続ドラマファンがいたり、特定の野球ファンがいたりしたら、その世帯ではいつもその番組を見るから、標本誤差は正負大小がバランスしないで特定の方向に偏ることになる、という指摘である。

この指摘は確かに無視できない。しかし調査会社はこれについての対応策を講じている。たとえば2年で調査世帯をすべて変更することと、それを600世帯一斉ではなく、逐次に行っていることである。1年間ではなく、数年という期間で考えると、平均化を考慮して数値の信頼度を評価することは不合理でない。

以上はすべて、数学的なきれいごとの議論である。現実にはこのきれいごとで終わらない問題がある。たった600世帯ということは、特定のテレビ担当者が特定の番組を見ることを12世帯ほどに働きかけると、それだけで視聴率が常に2%大きな方に偏ることを意味する。1世帯に20万円の謝礼を渡しても、総額で240万円に過ぎない。番組制作費と比べればゼロと同じである。視聴率10%程度のところでその値が2%上積みされていることは非常に大きな影響がある。関東地区の場合、スポンサーが番組を支持するかどうかの分かれ目になる数値が、視聴率10%、すなわち競合他社に比べて優位か劣位かを評価する境界値だからである。ある番組の視聴率が2%多くなることは、自動的に他社の番組の視聴率が2%減ることを意味する。こういうことがあるために、2003年にあるテレビ会社の担当者による視聴者買収事件が起こっている。非標本誤差の混入である。この種の誤差は数学の枠外である。

参考として言うと、視聴率についてのより細かい資料はインターネット経由で容易に入手できる。また文献［藤平］参照

## 4.7 正規分布

### 4.7.1　正規分布の定義

仮にある地域で成人男性の身長を調べてヒストグラムを作ったとすると、図 11 のような柱状の図ができる。

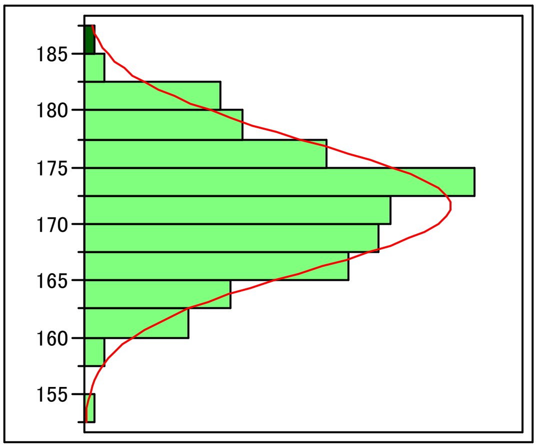



**図 11　身長の分布の例**

縦は身長なので cm などの単位を持つが、ヒストグラムの面積が 1 になるように高さを標準化すると、$x$ cm 以上の人の割合が、このヒストグラムの $x$ より上側の部分の面積になる。このようにそれぞれの値のものがどれくらいあるかという状態が「分布」（distribution）である。

身長の分布は、時期、地域、性、年齢などをどのように条件付けるかで異なるが、その形は図 11 のヒストグラムに重ねて描かれている滑らかな曲線に適合することが多い。この滑らかな曲線は、縦軸を $x$、横軸を $f(x)$ としたとき、（1）式で表されるもので、正規分布（あるいはガウス分布）と呼ばれている。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) \qquad (1)$$

この式の中にある、$\pi, \mu, \sigma$ はいずれもギリシャ文字で、$\pi$ は円周率であるが、$\mu$ と $\sigma^2$ は、正規分布の母数（parameter）と呼ばれる定数である。正規分布は、分布の集まりすなわち分布族（family of distribution）であって、母数の値を 1 組定めると分布が 1 つ指定される。図 11 に描かれているのは、$\mu = 172$、$\sigma^2 = 6^2$ の正規分布である。

正規分布は英語で「normal distribution」と呼ばれるので、記号で正規分布を表すときは、$N(\mu, \sigma^2)$ という表記が用いられる。特に、$\mu = 0, \sigma^2 = 1$ の正規分布 $N(0, 1)$ は基準正規分布あるいは、標準正規分布（standard normal distribution）と呼ばれている。

一般に、（1）式の $f(x)$ のような関数は、区間 $(a, b]$ に存在する人・物・確率などの割合を

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

で表すものである．この役割を果たす関数 $f(x)$ を分布の密度関数といい、密度関数から次の式で計算される量 $A, B, C$ をそれぞれ、分布の平均、分散、標準偏差という。

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} (x-A)^2 f(x)dx, \quad C = \sqrt{B} \qquad (3)$$

正規分布の場合にこの $A, B, C$ を計算すると、$\mu$が $A$ に、$\sigma^2$ が $B$ に等しい。こういう関係があるので、正規分布の母数$\mu$は平均と呼ばれ、$\sigma^2$ は分散と呼ばれ、$\sigma$は標準偏差と呼ばれている。

正規分布の密度関数は$\mu$に関して左右対称の一山型で、その左右への広がりが$\sigma$に比例する。視覚的に言うと、密度関数の最大値の約 60%の高さで水平線を引いたとき、密度関数との交点の横軸の値がほぼ$\mu-\sigma$,　$\mu+\sigma$ である。

### 4.7.2　正規分布の役割

身長に限らず、現実のデータには正規分布に適合する分布が多い。例えばある銘柄のカップラーメンを多量に購入して重量分布を調べたり、ある公称内径のナットを沢山集めて内径を精密に調べたりすると、正規分布に似た分布が得られる。品質管理が行き届いた大量生産では、製品の重量やサイズが正規分布に従うのである。

このように現実のデータで正規分布が頻繁に登場することは、中心極限定理で理論的に説明できる。中心極限定理というのは、偶然的に微小に変動する量を無数に多く加えたものの集まりは正規分布に従う、という内容の定理である。実際カップラーメンの重量は、水分を抜く前の麺やスープの量、あるいは水分を抜くときの温度など、微妙な変動の積み重ねによって変動しているからである。

正規分布の歴史を見ると、（１）式の関数形を導いたのはガウスやラプラスであると言われている。ドイツで生まれたガウスは、天体観測のデータには観測に伴う微小な誤差が含まれているが、同じ条件での測定値が複数あるときは、その平均値が最も真の値に近いと考えた。そして平均値が最も真の値に近いための条件は誤差が正規分布に従う場合である、ということを関数方程式の解として導いた。ドイツの人や物理学者が正規分布という名よりガウス分布という名を好むのはこのようなガウスの国籍・業績のためである。実際、欧州統合の直前のドイツ貨幣の 10 マルク紙幣には正規分布がガウスの肖像と共に印刷されている。

フランスで生まれたラプラスは、賭における確率を理論的に調べていて、例えば貨幣投げの試行における勝ち数が十分多数回繰り返したとき、極限として正規分布になることを理論的に導いた。そしてこの理論を背景として、正規分布は確率分布の族であるという認識が確率論の分野で定着している。

正規分布には、集団においてどのような値のものがどれくらい存在するかを、全体を 1 あるいは 100%として表示しているという側面と、偶然的に変動している量（確率変数）の確率分布という側面とがある。統計学や確率論では、後者で説明すること

が多いので、以下では、分布における割合を確率で説明する。

便宜上、標準正規分布における密度関数を$\phi(x)$、$x$ 以下の確率（分布関数）を$\Phi(x)$ と書こう。正規分布において、区間$[a, b]$に含まれる確率 $P(a, b)$は$(\mu, \sigma^2)$によって変わるが、$(\mu, \sigma^2)$が与えられていれば、

$P(a, b) = \Phi((b-\mu)/\sigma)-\Phi((a-\mu)/\sigma)$

という関係がなりたつ．したがって、いろいろな $x$ に対して$\Phi(x)$を数表として用意しておけば、任意の正規分布における確率が数表から求められる。例えば、母数が $(\mu, \sigma^2)$の正規分布での $x=\mu-3\sigma, \mu-2\sigma,$ … 以下の確率 $F(x)$は次のようになる。

**表１　正規分布の下側確率**

| $x$ | $\mu-3\sigma$ | $\mu-2\sigma$ | $\mu-\sigma$ | $\mu$ | $\mu+\sigma$ | $\mu+1.6\sigma$ | $\mu+2\sigma$ | $\mu+2.6\sigma$ | $\mu+3\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 0.003 | 0.023 | 0.317 | 0.500 | 0.683 | 0.945 | 0.977 | 0.995 | 0.997 |

確率はすべてを加えたときに 1 になるものとされているから、1- $F(x)$で上側確率が計算できる。例えば、$\mu+2\sigma$ 以上の確率は約 2.3%で、$\mu+2.6\sigma$ 以上の確率は約 0.5%である。標準正規分布の$\Phi(x)$に関する数表、あるいはそれと同等な数表を正規分布表という。

### 4.7.3　偏差値

ある生徒集団で、ある科目の試験をすると得点の分布は正規分布に近い一山分布（unimodal distribution）になる。これを正規分布で近似するときは、$n$ 人の得点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ から、次式で平均 $m$ と標準偏差 $s$ を計算し、$m$ を$\mu$、$s$ を$\sigma$と見なすのが良い近似となる。

$$m = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1}[(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \cdots + (x_n - m)^2]}$$

このとき、$m+as$ 以下（以上）の人の割合の近似値は、正規分布表から求められる。例えば、$m = 50$、$s = 10$ であれば、$m-s$=40 点以下の人は全体の約 31.7%であり、$m+2s$=70 点以上の人は全体の約 2.3%である。

実際の試験では、満点が必ずしも 100 点でなく、平均が 50 点でなく、標準偏差が 10 点ではない。しかし、1 人の受験者の得点 $x$ を $u=\{(x-m)/s\}\times 10+50$ という式でスコア $u$ に変換すると、得点が平均 $m$ になっている受験者のスコアが 50 になり、得点が $m+2s$ の受験者のスコアが 70 になるので、あたかも 100 点満点で平均が 50、標準偏差が 10 の試験の成績のようになる。もし、得点の分布が正規分布で近似できるなら、得点が $u$ 以下の受験者の割合 $F(u)$が表 2 で評価できる。このスコア $u$ のことを、受験関係者は偏差値と呼んでいる。

表２　偏差値の下側割合

| $u$ | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 66 | 70 | 76 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(u)$ | 0.003 | 0.023 | 0.317 | 0.500 | 0.683 | 0.945 | 0.977 | 0.995 | 0.997 |

以上は得点の分布が正規分布で近似できることを前提にしたものであるが、現実の分布は微妙に正規分布からずれることが多い。難しい（易しい）問題が多いときは、平均点が下がり（上がり）、分布は左右対称でなく点数の高い方（低い方）に裾を引く。このような場合に正規分布で各受験者の相対的な位置を評価すると、微妙なずれが生じる。このような場合は、得点分布が表 2 の下側割合になるように偏差値を与えるという調整が行われる。偏差値を受験指導に利用するには、その方が合理的だからである。

偏差値の利用で注意しなければならないことの 1 つは、この値が、対象集団を固定したときの、その集団内の相対的位置を示すものだということである。対象集団として、同年代で大学を受験する全受験者を想定している場合と、特定の学校を受験する全受験者を想定している場合とで、偏差値の意味は違う。ある教室で学んでいる全生徒を想定している場合はさらに違った意味を持つことになる。

注意しなければならないもう 1 つは、それが個人の固定した絶対的能力を表す指標ではなく、時と共に変化する、指定科目についての学習成果、受験適応能力のだいたいの指標に過ぎないことである。ある時点で偏差値が 70 と評価されていれば、その科目で良い成績を取れる可能性は大きいが、それに安住していれば可能性が小さくなるし、その科目で計れない側面の評価には役立たない。

偏差値に神経質になりすぎることは、人間の成長に必ずしも寄与しないと考えるべきであろう。

### 4.8　日本語と数学

日本語は、言語として “論理的”で、筋道の通った曖昧さのない表現が可能な構造と基本語彙をもつが、使い手が“論理的”に表現しようと気を付けなければ実現できない。日本人は昔から婉曲的に表現することが多く、明確でない表現になってしまうことが多い。

日本語を通じて数学を学習する、伝える、教育する、研究する際には、言葉の意味と用法に気を付けなくてはならないことがある。

以下では、はじめに、日本語にある曖昧表現、および数学における多義語をいくつか挙げ、それを避けるにはどうするべきか述べる。次に、数学的な命題を表現するのに、基本的な論理語、すなわち、「と、かつ」、「または、および」、「ならば」、存在表現、全称表現、否定表現について、注意すべき点をいくつか並べる[74]。

[74] 詳細は参考文献［細井 1］［細井 2］［細井３］を参照。

### 4.8.1　曖昧表現および多義語

I. 曖昧表現あるいは多義文

１) 語の修飾関係が明確でないもの

「小さな幼稚園のこどもたち」

この文は、「小さな幼稚園にいるこどもたち」とも「幼稚園にいる小さなこどもたち」とも解釈される。しかし、今示したように言語情報を増やした表現にすれば曖昧さを解消できる。

「ａとｂかｃが０」

という文は

「ａは０であり、さらにｂかｃが０」

ということなのか、

「ａとｂの両方が０、あるいは、ｃが０」

ということなのか、はっきりしない。

この種の（論理語の複合的な使用による）多義文は、工夫してコンマや括弧を入れたり、語順を変えたりすると簡単に改良できるが、その前に多義であることを見抜く技術が必要となる。

「今日は雨降る。天気でない」

「今日は雨降る天気でない」

これらの文は、耳で聞いただけでは区別がつかず、「今日は雨が降るので、良い天気ではない」とも「今日は、雨が降るような天候には、ならない」とも解釈でき、意味が曖昧である。しかし、やはり、今示したような表現に変えれば、多義に解釈されない。

２）文法機能が複雑な語の使用によるもの

「ぜんぶの男の子が好きな女の子がいる」

この文は、次の 3 通りに解釈される

「ぜんぶの男の子に好かれている女の子がいる」

「どんな男の子にもそれぞれ好きな女の子がいる」

「ぜんぶの男の子を好いている女の子がいる」

初めの２つと３番目との解釈の違いは「が」の文法的機能の捉え方による。初めの２つの間での解釈の相違は「ぜんぶ」と「いる」の組み合わせの意味の捉え方による。この文のように、全称（ぜんぶ、どんな）と特称（いる、存在する）の組み合わされたものは、全称と特称のどちらの方が文の主要部分とより強く結合しているかをはっきりさせないと、多義文となる。

３）語の意味、用法が分野によって異なることによるもの

「ぜんぶの石が白とは限らない」

この文は、ふつうは「白でないものがある」（ぜんぶ白でない可能性もある）という部分否定の意味で使われている。一方、英文法の本を見ると、（英文法での）部分否定の説明の日本語文に出てくる文体で、「白もあれば、白でないものもある」とい

う意味だという。さらに、素直に解釈する人は、数学者でさえも、「限らない」ということから「ぜんぶの石が白かもしれないし、そうでないかもしれない」と解して、この文から限定的な情報は得られないとする。

「素直な解釈」では「限らない」を解釈しているが、数学と英文法では「ぜんぶ」と「限らない」の組み合わせを解釈している。また、その場合に、部分否定の定義が異なってもいる。

「ぜんぶの石が白ではない」

これは、「ぜんぶ」と「ない」との組み合わせに関するものであり、人により、場合により、部分否定と解釈したり、全体否定と解釈したりする。

II. 多義語

１）数学用語で問題があるもの

たとえば、円は平面内で１点（中心）から等距離にある点（軌跡）と定義されているが、円の面積を考えるときには、軌跡（線）そのものの面積（数学的には「線」の面積は０である）ではなく、軌跡で囲まれた部分の大きさを考えている。この種の混乱はいくつも見られる。

これは数学が自身で解決すべきものであり、実際、その努力をしているかと思われる。

２）数学では厳密に定義したのに、日常語化されたときに意味が加えられ多義になったもの

たとえば、直線に関連した平行という概念がある。日常語では、直線でないものに対しても、「交わらない」という考え方で、平行を考える。その極端な例は平行な議論である。

比例も、日常語では、いろいろと、比例もどきの意味が加えられているし、反比例についても、一方が増えると他方が減るという意味で使うような例が経済学であったりする。

３）日常語を数学が借用した際に厳密な意味、用法を与えて、特殊化したことによる混乱

次の節で詳しく述べるが、論理語（「と」、「または」、「ならば」、など）にこの第三の例が多い。

### 4.8.2　論理語に関する日常用語と数学用語の微妙な違い

I. 「と」

英語の and に対応する語である。次の日常文の意味を考えてみよう。

「千円で A と B が買える」

数学文としてなら、「A と B を合わせて千円以下」という意味しかない。しかし、日常文では、その意味に加えて、「A も、B も、千円以下」という意味をも持つ。この場合の「と」は列挙の「と」である。数学でも、「と」を列挙のために使う場合がある。

II.「または」

英語の or に対応する語である。日常語の「または」はどちらが選択されるか（正しいか）がはっきりしている場合には使わないのだが、数学では、「1=0 または 1>0」のように、「1>0」が正しく、「1=0」が正しくないということがはっきりしている場合でも使うのだ。その結果、不等号≧の定義文

「a≧b とは、a=b または a>b ということ」

から、

「 1≧0 」

と書いてよいことになっている。

III.「ならば」

英語の if … then に対応する語である。次の数学文の意味を考えてみよう。

「正方形ならば、四辺が等しい」

これには

「正方形でないならば、四辺が等しくはない」

という「裏」の意味はない。実際、菱形でも、四辺は等しい。

一方、次の日常文の例

「宿題が済んだら(ならば)、遊ぼう」

の場合には、

「済まなければ、遊ばない」

という、論理でいう「裏」の意味を持つ。

「裏」の意味をも含む「ならば」は、プログラミング言語の if … then の意味でもあることを注意しておきたい。（細井勉氏は、スイッチ文と呼んでいる。）

上のような、論理的な表現に必要となる語を日常語的に捉えて数学文を考えたのでは、数学を精密に議論することができなくなる。このような注意が必要な例は、たくさん、参考文献に紹介されている。

日常語の「ならば」は時間の前後関係、因果関係などを表すが、数学文では、原則として、時間と関係する「条件」ではないことに注意されたい。

IV.「存在する」

次の全称表現と関わるが、「すべてが・・・である、というのではない」という部分否定を表現するのに「・・・でないものが存在する」という表現にした方がわかりやすいという点に配慮されたい

また、次の問題のような問題があることに注意されたい。

「（正五角形の図があるとして）次の図には何本の対角線が存在するか」

数学的に考えると、明らかに、答えは「５本」である。しかし、ふつうの子供が日常語的に考えると「０本」という答えになる。

この場合、数学語としては「何本引けるか」という可能性を問題としており、「現実に何本存在するか」は問題としていないのである。

V.「すべての」

他にも「どれも」、「任意の」、「勝手な」、「あらゆる」などでも表現されるが、否定と組み合わされたときに注意しなくてはならない。

「すべての点 x に対して P(x)でない」

のような、部分否定か全体否定か曖昧な文がある。部分否定ならば、「P(x)でない点 x がある」、全体否定ならば、「P(x)でない点がすべてである」というように、論理語を後置させる語法（逆ポーランド記法）を用いて書き換えるのがよいだろう。

VI.「ない」

否定そのものには、日常語と数学語とで、ほとんど意味のずれはないが、否定の範囲と関係して意味が曖昧あるいは不明となる否定文はたくさんあり、上の「すべて」で注意したことのほかに、たとえば、

「これは正三角形ではない」

というとき、「正三角形」でない三角形であるというのか、「正多角形」だが正「三角形」ではないというのか、いろいろな解釈がありうる。

また、数学文では、二重否定は消去される、ということにも注意されたい。日常語では、

「時間がないわけではない」

という例のように、二重否定は必ずしも消去されるわけではない。

## 4.9　江戸時代の数学、和算について

### 4.9.1 『塵劫記』

江戸時代初期の数学の進展はソロバンの普及と大きく関係している。日本には室町末期頃に中国からソロバンがもたらされ、商業活動が活発になるにつれて広く用いられるようになった。そのためにソロバンの学習書が必用とされ、『算用記』や毛利重能による『割算書』などの教科書が刊行されたが、寛永4年（1627）に出版された吉田光由による『塵劫記』でその頂点に達した。著者の吉田光由は角倉一族に属し、自らも兄の吉田光長とともに菖蒲谷隧道の掘削事業に参画したこともあり、数学が実際に使われる場面にも詳しかった。

**図12　相似比を使って木の高さを簡単に測る方法**

出典：寛永 11 年版大型三巻本『塵劫記』下巻

『塵劫記』は角倉一族で必要とされた数学教育活動の成果を取り入れたものであったと思われる。『塵劫記』は単なるソロバンの入門書ではなく、当時の農業、商業、工

業で必用とされる数学が網羅された教科書となっていた。そのために多くの読者を得、江戸時代を通して一大ベストセラーとなった。海賊版も多数発刊され、「じんこう」は数学を意味するまでになった。

『塵劫記』の特徴の一つは至る所で億や兆の大きな数値が出てくる点にある。ソロバンを使うことによって計算は容易になったが、数値感覚を持つことが商業が盛んになってきた当時の社会で重要な課題となっていたから思われる。当時は、億や兆の単位の数は実生活では必要なかったが、ソロバンを使って計算しながら数値感覚を磨くためには大きな数を取り扱うことが有効であった。現在の電卓時代には、それに相応しい数値感覚を磨くための工夫が必用とされることを『塵劫記』は示唆している。

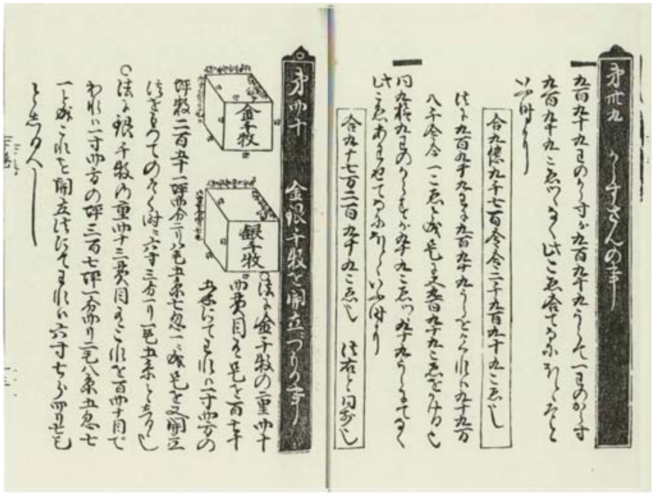


**図 13「からす算」**

999 のカラスが 999 の浦で 1 羽のカラスが 999 声鳴いたときに全部で何声になるかを問う問題。本文には 999×999×999 の計算をするとしか記されていないが　999＝1000-1 を使って計算したと推測される。この方法を学んだ後、次の易しい演習問題で 99×99×99 を計算して知識を確実にすることが求められた。吉田光由の教育観が伺える。出典：同上

ところで、『塵劫記』やその後に出版された数学の教科書の多くが、ソロバンでの加法・減法は誰でもできるものと見なして、ソロバンの割り算と掛け算から記述を始めている。「女の子算法」という言葉は、女の子でも計算できる加法と減法のみを用いる方法を意味する差別用語であるが、こうした言葉ができるほどに、ソロバンによる簡単な計算法は親や知人から子へと教えられ、江戸時代は社会全体が教育を担っていた。江戸時代のソロバンの教科書は、速く計算を行うためではなく、数学が必要となる場面でソロバンを使っていかに問題を解決するか、その手法を会得することに重点が置かれた。そのために『塵劫記』は数学的に興味ある、時には遊び的な要素を含む問題を多数取りあげた。この伝統は江戸時代を通して引き継がれ、簡単なソロバンの入門書にも数学的に興味ある問題が必ず取りあげられていた。

その一方で、日本のみならず漢字文化圏の数学の教科書の常として、理論的な解説はなく、問題とその答え、および答えの導き方が記されただけで、学習者は問題を解きながら、理論を自然に身に付けていくことが期待されていた。また、数値計算が楽にできたために、論理的に議論を展開するよりは、得られた数値の正しさによって議論の正当性を確かめることに重点が置かれた。問題の解答では、得られた数値が問題に適していることを吟味することが必須のこととされたが、一方では論理的な推論法が江戸時代の数学では余り育たない要因となった。これらの伝統は明治になって和算

が西洋数学に替わっても本質的に維持され、現在の数学教育にまで影響を及ぼしている。

### 4.9.2　関孝和

ところで、江戸時代初期の各藩では土地の測量が必用とされ、また 862 年に宣命暦が導入されて以来改暦がなく、天体現象と暦とのずれが 2 日ほどに拡がっており、測量と改暦のために数学の必要性が認識され、次第に専門の数学書も出版されるようになった。江戸時代の数学の発展に決定的な影響を与えたのは、中国元時代に朱世傑によって著された『算学啓蒙』と南宋時代に楊輝によって著された『楊輝算法』である。これらの本は中国では失われ、朝鮮で再刊されて、その数学的内容の理解とともに保存された。秀吉の朝鮮侵攻によって略奪された多数の医学書に混じってこれらの数学書は日本にもたらされ、次第に日本の数学者の関心を引くようになった。これらの内容を完全に理解し、さらに進展させたのは関孝和である。彼は『算学啓蒙』にあった 1 変数代数方程式を記す方法（天元術）を発展させて、多変数の方程式を記す方法（傍書法）を考案し、さらに多変数の高次連立方程式から変数を減らすために、行列式の理論と終結式の理論を世界に先駆けて創始した。さらに、円周率の計算では、数値計算を早めるために 19 世紀にヨーロッパで使われるようになったエイトケン加速法をはるか以前に適用し、またベルヌーイ数をベルヌーイと全く独立に導入するなど、関孝和によって数学の内容が豊かになり、さらに建部賢弘という優れた弟子を持ったことによって、関孝和の数学は深めら

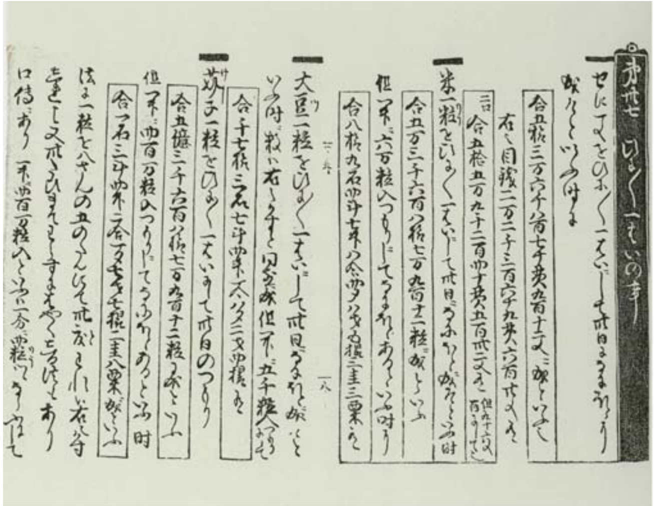


**図 14　「日に日に一倍のこと」**

一倍は今日の 2 倍のこと。倍ずつ増やしていくと巨大な数値になることが問題で具体的に確かめられる。最初の問題はお金 1 文を毎日 2 倍にしていくと 30 日目にいくらになるかを問う。答えは 536870 貫 912 文（1 貫は 1000 文である）。次のページには、芥子 1 粒を毎日 2 倍していくと 50 日目に合わせて何粒になるかを問う問題がある。答えは 562,949,953,421,312 粒。

出典：同上

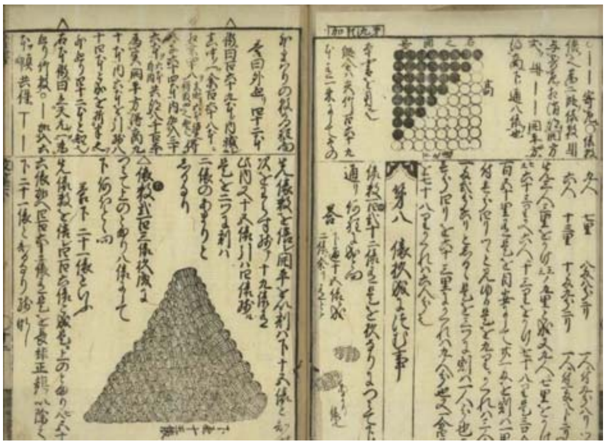


**図15　『改算記綱目』**

『塵劫記』に次いでベストセラーとなった『改算記』の解説版。
杉算(1＋2＋・・＋nの計算)の解説が頭注に与えられている。

れ、その後の和算の興隆を引き起こした。

### 4.9.3　関孝和以後

多変数の文字式を使えるようになって、数学的に自由に式で表現できるようになり、江戸時代の数学は、古代中国の伝統を突き抜けて飛躍的に進歩した。ただ、中国数学の伝統を受け継いだために、等号の記号がなく、A = Bという表現ができず、つねに A – B (このように記すと自動的に = 0を意味した)の形で表現する必要があった点では、西洋数学の文字式よりは使うのに不便であった。しかし、江戸時代後期から明治時代に西洋数学を輸入したとき、文字式の記述法は全く違っても、数学的には同じであったので、その学習を容易にした。ただ、江戸時代の数学では関数概念が最後まで確立せず、微分積分学が十分に発展しなかったことが、明治になって西洋数学に和算が取って代わられることとなった。

**図 16　19 世紀初頭に出版されたソロバンの教科書『ぢんかう記』**

20ページしかない小冊子の最初のページにはソロバンとは直接関係ない『塵劫記』の問題が記されている。またソロバンは割り算の九九から始まっており、足し算、引き算についての説明はない。

江戸時代の数学者たちは流派を結成し、互いに競い合ったが、流派は教育機関としての重要な役割を果たした。江戸時代の数学教育は寺子屋から始まる民間の塾が担っていた。関孝和をその始祖とする関流と激しく対立した最上流（さいじょうりゅう）の始祖会田安明の著書を関流の多くの数学者が所有していたことからも分かるように、流派間の壁は低かった。新しい発見があれば、発見者の塾に入門することによって、そのことを学ぶことができた。また、各流派の教育では、数学の応用として測量術と暦学が必ず取り上げられた。測量術と暦学が江戸時代を通して数学の実質的な応用分野であった。巷に流布している「江戸時代の数学者は芸に遊んだ」、「各流派はギルド的な組織をつくっていた」という説は訂正を要する。実際に、明治初期、地租改正のために日本全国で測量が行われたときに、測量士が不足した地方では和算家が測量を担ったことや、地方の商業活動のために和算家が利息計算の表を使ったことなど、江戸時代の数学が応用にも充分に意を配っていたことが分かる。数学とその応用が理学部、工学部と分かれてしまっている現在の日本の数学の不幸の始まりは、明治時代にいわゆる純粋数学と応用数学が理学部、工学部と別々に輸入されたことに始まる。

### 4.9.4　和算の民衆への拡がり

一方、江戸時代の数学では文化史上類を見ない現象が出現した。『塵劫記』などの入門書で数学の面白さを知った人たちが、さらに高度な数学を学び、各地の数学塾が身分制度の枠を越えて繁盛し、子どもや女性も塾で学んだ。子どもの師範代も登場したことは数学という学問の特質を表している。そうした高度の数学を学んだ人たちは自分で難しい問題を作り、解くことに熱中し、数学の問題とその解答を記した絵馬（算額と呼ばれる）を神社や寺に奉納した。さらにそうした算額を見た人が、解答の誤りの指摘やさらにはさらに難しい問題を見出して新たな算額をつくることが流行した。多くの人が集まる神社や寺に掲げられた算額は、成果発表の場としての役割を持ち、全国的な規模で数学の交流が行われた。江戸時代後期には数学を教えて全国を行脚する数学者も登場した。こうした算額で扱われた問題の多くは、理論的な観点からはさして重要でない問題が多かった。しかし、こうした多数の数学愛好家の存在は専門の数学の研究を支えただけでなく、明治時代になって西洋数学を必用とする人たちが容易に数学を学ぶことができる基盤を作り出した。江戸時代末期には、関数概念を欠く和算では軍事面で対応できないことから西洋数学の必要性が認識された。現代の数学が軍事面とも深く関わっていることを考えれば、江戸時代の数学が市民社会で必用な実用数学と文化的な数学が主で、軍事面には全く関与しなかったことは特筆すべきことである。また現代日本では教育研究機関でのみ数学の研究が行われているのに比すれば、江戸時代は農村から都市に至るまで身分制度を越えて多くの人たちによって数学の研究が担われていたことも特筆に値する。

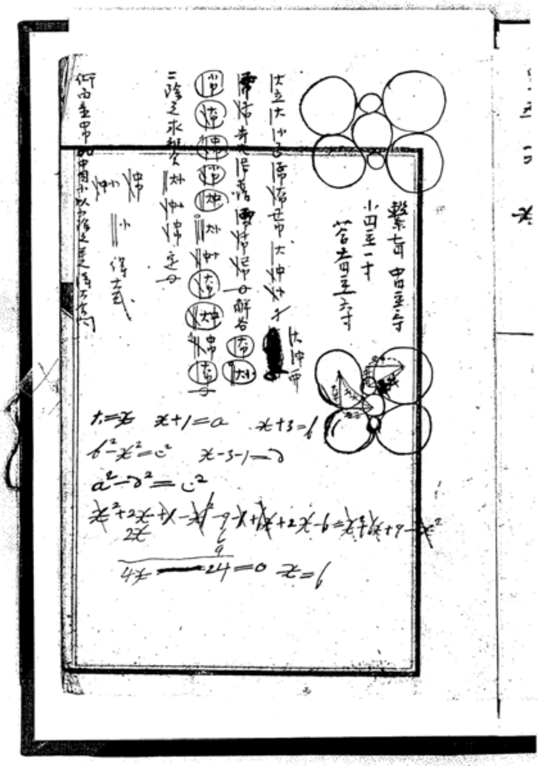


**図 17　備後福山藩士であった佐藤則義（1820–1896）のノート『数学浅問抄解』**

佐藤則義は関流の数学を学び、福山藩の藩校で和算を教えた。また、東京湾の測量にも従事している。このノートは佐藤が西洋数学を勉強したときのもので、上の方では和算の文字式を使って問題を解き、下の方では西洋数学の文字式を使って解いている。式の表現は全く異なるが内容は一致する。佐藤則義の蔵書の一部は京都大学附属図書館に寄贈された。その中には最上流の数学書も含まれている。(京都大学附属図書館蔵)。

# 第５章　数学と人間との関わり

これまでは「数学」の側から、数学の世界がどのようなものであるかを述べてきた。ここで方向を逆転して、数学が関わっているものの側から、数学について考えてみたい。まず第１に、数学は個人としての人間に関わっている。そして第２に、個人が作っている社会に関わっている。第３に、中でも数学は（工学を含めた）自然科学の基礎言語としてこれに関わっている。それら各々の観点から数学を眺めてみよう。さらに第２第３については歴史的観点も加えることとする。

## 5.1　数学と個人との関わり

成人としての個人は数学とどのように関わっているだろうか。今まで述べてきたように、数学の世界は様々に多様であるが、個人にとっても数学との関わりの様態は様々である。すなわち数学的知識を能動的に用いるか、受動的に用いるか、あるいは数学での考え方をより広い自らの人間性の一部としていくか、数学を自らの「教養」の一部として位置付けていくか、といった幾つかの可能性がある[75]。

### 5.1.1　日常生活で数学を能動的に使う

私たちが小学校の算数で学んだことが日常で役に立ち、そのおかげを蒙っていることはおそらく誰も異論はないだろう。私たちは、日常的に数を取り扱っており、計算を行っている。

ところがそうした用い方の多くは現在様々の文明機器に取って代わられており、私たちは自分でそれをする必要がなくなりつつある。お札の数は現金出し入れ機がずっと速くしかも正確に数えてくれる。レジでの会計も間違いなくスピーディに機械がやってくれる（しかもバーコード読み取りによって入力ミスもない）[76]。このため、例えば日本人の暗算能力は大幅に低下していると思われるが、それがどのような影響をもたらすのかは、これから慎重に見ていかなければならないことである。

しかし私たちの数の用い方は、単にものを数えたり、計算したりするだけではない。こうした直接的な数の用い方だけでなく、私たちはもっといろいろのことができる。

まず私たちは、算数を上手く使うことで、計算の労力を節約することができる。例えば 4 人でレストランの支払いをまとめるとき、A氏 1,400 円、B氏 1,100 円、C氏 900 円、D氏 800 円であれば、A氏がD氏に 200 円を渡し、B氏がC氏に 100 円を渡し、さらにみんなが千円ずつを出して、A氏がさらに 200 円を出すとする。これはこれらの

---

75　これらは数学教育で言われる数学の持つ３つの価値に概ね対応している。すなわち最初の 2 つは数学の実用的価値、3 番目は数学の人格陶冶的な価値、最後は数学の文化的な価値に対応する。

76　もちろんこれが可能となる背後には、数学の理論があり、科学技術が用いられているが、私たちはその産み出したものの恩恵を享受していさえすればよい。

数値の大まかな平均を千円と見積もってその差額を調整しているわけである[77]。

また計算の結果が正しいかどうかをチェックするのにも、算数の考え方を応用できる。例えば幾つかの数を足した場合、抜けがないかどうかをチェックするのには１の位だけを足し直してみることをする[78]。これは完全に誤りを防ぐことはできないが、充分実用的な方法であり、実際コンピュータプログラムの中でもよく使われている。

これらはいずれも単なる計算アルゴリズムだけではなく、数の持つ理論的な性質を応用しているわけである。

そして、ここでは「数」を例として述べたが、より高度な概念を用いた場合においても、それによって単に問題を解くだけでなく、より簡単に解く、その解の正しさを確かめる、といったところにも、数学の知識・考え方が使われるのである。

図形で私たちが一番使うものは地図であろう。地図で道順だけでなく、方向や距離まで分かるのは、そこで私たちが相似・平行などの幾何学的性質についての知識を持っているからである。

また、私たちは図形について述べた「特徴的な性質に着目して、それ以外の要素を捨象する」という行為を日常的に行っている。例えば、最寄り駅から自宅への道順を説明するには、口で言うより図に描いた方が分かりやすいが、その場合、地図に載っているよりずっと簡単な、曲がり角など必要最小限の情報のみを図に描いて示すはずである。

数式はもっと積極的に用いられていいものである。例えば携帯電話などの料金計算は様々の割引率が混在していてややこしい。しかしこれらを数式で表しておいてから、自分の過去の利用データを代入してみると、どれが一番安いかがすぐに分かる。これはシミュレーションの手法である。もう少し詳しく考えると、どんな使い方のときにどれが安いかも分かる。これはもう線形計画法の立派な応用になっている。もし数式に書けないような説明であれば、これは料金の情報開示が不十分なのであるから、会社に文句を言わなくてはならない。つまり会社の信用度もこれで分かる。

### 5.1.2　専門職業人として数学を能動的に使う

私たちが学校で学ぶ知識や技能のほとんどは、必ずしも私たち全員が直接それを必要として用いるものではない。

しかし私たちが何かの職業に就く、あるいは趣味でもいいが何かをしようとすると、ただちにそれに関する知識・技能が必要になってくる。それぞれの職業に進む人達は当然そこで必要な専門的知識・技能を身に付けなければならない。

そうした知識・技能を身に付けるために必要な最も基本は言葉であり、それに次いで数学がある。様々な社会的あるいは科学的知識はその上に築かれているからである。

したがって成人が必要とする専門的知識の多くには、直接あるいは間接的な形で数

77　「インド式数学」なるものが一時流行ったが、これはこうした考え方を推し進めたものである。私立中学入試の計算問題に以前から頻出しており、目新しいものではない。

78　しかも足してゆくときに途中結果の 10 以上の位は無視し、最後の桁だけ考えていけばよい。

学が関わっている。理工系の職場では、自然科学が用いられるので当然のことであるが、金融機関などの経済部門でも単なる数の計算だけでなく、より高度の数学を駆使する理論が随所で必要である。最近の金融工学の発展はその顕著な例である。これだけでなく、近年のコンピュータの発達によって、従来関係がないように見えた様々の分野で新たに数学を用いるようになっており、その結果より多くの人々にとって数学との関わりが不可欠になっている。

この場合、数学理論の部分を単なるブラックボックスとしてしまうと、そこで得られた結果が正しいのかどうか、特に用いられている数学モデルの適用が適切なのかどうか、より改良の余地がないのだろうか、といった専門の側で必要な様々の判断ができなくなる。

したがって自らの専門的知識の中で用いられる数学についてはできる限りきちんと理解して、それを能動的に使えるようにしておくことが望ましい。単なる「言葉」や「道具」としてでなく、なぜ数学がそこで用いうるのかという理由をも含めた数学の理解が必要である[79]。

ここでは「すべての日本人」に対する数学リテラシーを考えるので、このレベルでの数学の利用を直接考察の対象としていないが、いわば「教養」として、どのような分野でどんな数学が必要とされるかについてある程度の概括的知識を持っていることはすべての人にとって大切である（cf.[5.1.5]）。

また個々の職業人としての「数学リテラシー」、例えば小学校教員、あるいは中高数学教員が持つべき「数学的リテラシー」が何かは、別個にこれに倣って考えていく必要があることも強調しておきたい。

### 5.1.3　個人生活の中で数学を用いて判断する

個人の生活でさらに多いのは、数学的に与えられた情報を用いたり、その価値や正しさ・適切さを判断することである。ここで「生活」というのは、単なる身の回りのことだけでなく、広く社会生活をも含んでいる。

中でも最も触れる機会の多いのは統計データで、これは表、グラフなどの形で提示される（cf.[2.4]）。その内容は単なる日常的なものよりも、むしろ新聞記事などの社会的なことがらに関わるものが多い。例えば各種の世論調査、視聴率、学力調査などがよく話題になる。個人に関わるものとしては、例えば商品についての説明などがある。その場合、ある判断（命題）が提示されて、その根拠としてデータが出されていることが多い。例えば、新しい型の電気製品を使うと「一ヶ月で電気代がこれだけお得」といった宣伝文句がよくある。それについて、そのデータあるいはデータ表示からその命題が正しいと言えるのかどうかを判断しなければならない。この場合、提示されたデータからその命題の述べる性質が読み取れるかどうかとそのデータ自身が信頼できるかどうかの 2 種類の判断が必要になる。

---

79　数学の必要性が本当に分かると、対応する数学理論は理解がそれ程難しくないものである。

社会的な統計データの場合、然るべき調査を行い、そこから何かを読み取るのは、数学の社会との関わりに属すことがらとも言えるが、私たち１人１人も社会の責任ある構成員、すなわち「市民」（citizen）として、そのデータから読み取れるとされた内容が妥当か否かを判断する能力を持つ必要がある。いやしくも具体的数字の入ったデータが添えられたからというだけで、その判断を肯定するようなことがあってはならない。

特に「トレードオフ」(trade-off)[80]の判断に関わるデータの場合、そこには必ず「価値判断」の要素が入ってくるので、単なる数字的な内容とのきちんとした区別が必要である。日常的な例で言えば、商品を買うときの価格と品質・性能について、後者やそれぞれに置く価値判断の重みは簡単に数値化できるものではない。しかし社会的なデータの提示の場合、その辺を曖昧にした説明が少なくないのである。

この他、地図を読んだり、科学的な事項に対して与えられた説明の中にある数理的な部分について、その妥当性を判断したり、ということがある。この場合には、理論的な妥当性だけでなく、そこで用いられている数理モデルそのものが妥当であるかという判断を含む。数理モデルはあくまでも現実事象の近似であるから、そこには当然限界がある。その判断自身を自ら行うのは困難かもしれないが、そうした限界があることを踏まえた説明がなされていれば、その説明はおそらく信頼に足るという認識を少なくとも持つべきである。

### 5.1.4　数学的な考え方を通して思考力・コミュニケーション能力を高める

数学はひとつの「言語」であり、数学的に考えるとは数学という言葉を用いて考えることだと第３章で述べた。これは自らの中で数学を考える場合であるが、数学の本を読んだり、他の人と数学の問題を議論したり、あるいは数学について発表したりすることは、数学言語によるコミュニケーションに他ならない。思考力とコミュニケーション能力とは表裏一体のものなのである。

そこで用いる、前提や概念を明確にすること、筋道立てて論理的に議論を進めること、結論を分かりやすく明確に言い表すことなどは、数学に限らない、通常の思考やコミュニケーションにおいても大切なことである（cf.[4.1]）。

数学言語では、自然言語以上にこうした広い意味での「論理性」が明確なので、数学での「証明」や「計算」を注意深く行うことは、自ら考え、日常的なコミュニケーションを円滑に行うことと密接に関連している。抽象性や論理性を含む言語コミュニケーション能力は、数学の専売特許ではないが、しかし数学の学びの中で、それを意識化することによって一般の思考力・コミュニケーション能力の向上に役立てていくことができる。逆に文字式の使用や証明を単なる形式的操作や数学での特殊なものの言い方のレベルにとどめていては、それは一般的な能力の向上につながっていかない。こうした認識を持つためには、高等学校以上での数学あるいは他教科での学び、さらに社会生活の中での経験が必要であり、逆に高等学校以降の数学教育でこの点への十

[80] 複数の要素があって互いにプラスマイナス反対方向に作用する状態のこと。

分な配慮が必要である。

### 5.1.5　数学が社会や科学で果たしている役割および文化としての価値を理解する

私たちが学校（特に中等教育以降）で学ぶ知識や技能のほとんどは、必ずしも私たち全員が直接それを必要として用いるものではなく、それぞれの人が職業などで必要な専門的知識・技能を通して関わることとなる。数学も然りである（cf.[5.1.2]）。

これに対し、一般の人々にとっては、そうしたより高度の数学が、どのような身近な概念や考え方に由来し、どのように社会や科学の中で用いられているかを「お話」として知っており、もし必要となった場合にそれを身に付けることができる能力を持っていれば十分である。それは人類の文化としての数学をその役割・価値を含めて理解することに他ならない。本書の「数学の世界」の中で述べてきたものの多くはそのレベルのものである。例えば微分積分について、理論としては高等学校で学ぶのであるが、その考え方は（瞬間的な）速度などとしてすぐ私たちの身の回りにあって誰にも理解可能である。くれぐれも誤解しないでいただきたいが、ここで「微分係数」の数学的な定義や、様々の関数の「導関数」の公式を日本人すべてが知るべきだと主張しているのではない。微分という考え方があって、それは現実に「速度」として表され、ものの運動を正確に知ることに役立つ、といったことを「お話」として日本人すべてが知っていてほしいと考えているのである。本報告の中で、話題としては高等学校で初めて教えられる事項が多く入っているが、それらはこのような意味で書かれている[81]。

### 5.1.6　数学を楽しむ

本報告の著者達が、「そうあるべきだ」というよりは、「そうあってほしい」と心から望んでいるのは、日本人すべてが数学を好きになり、数学を楽しんでほしいということである。

実際、江戸時代の和算は、その内容の多くが実用的な話題を用いながら、人々が数学を楽しんでいたことがよく分かる（cf.[4.9]）。日本人は伝統的に数学が好きな国民と言えよう[82]。

初等幾何学は、数学理論としては完全に過去のものであるが、数学の教材としては今なお最良のもののひとつである。数学者だけでなく多くの自然科学者が少年少女時代にその魅力に取り付かれ、それが科学者としての道へとつながっている。

これほど本格的でなくとも、様々の数学パズルがある。最近では「数独」に人気があるが、これは一種の論理パズル（虫食い算と同様に可能性を論理的に絞り込んでゆく）である。ひところ一世を風靡した「ルービックキューブ」は、数学的には群論の「語」の問題に帰着されるより高度のゲームであるが、経験的に見出されたアルゴリ

---

81　ただし「トピックス」では、参考のためにかなりこのレベルを超えた先まで書かれている。

82　「数学セミナー」「数理科学」といったかなり高度な数学雑誌が商業ベースで発行され、一般書店に並んでいる国は他にないようである。

ズムが速い解を与える。
これらの中間に様々のレベルのものがあるが、いずれも数学を通して「考える」ことの素晴らしさを私たちに教え、問題を解決する「達成感」を私たちに与えてくれる[83]。

## 5.2　数学と社会の関わり

社会には多種多様な人間関係が存在する。個人対個人、個人対社会、社会対社会のそれぞれにおいて、協力、相互依存、保護・支援、競合・闘争、異議申し立て、といった関係がある。これらのいずれの場面においても、コミュニケーションが不可欠であり、そのための言語・意志疎通・共通了解の手段・道具として数学は重要な役割を果たしている。これは数学が数というはっきりしたものを主に用いること、比較的誤解の余地が少ない言葉づかいをする言語であること、用いられる論理が（前提が正しい限り）妥当な予測結果を導くことなどの数学の特質（第 1 章）に由来する。以下社会生活で特に数学が鍵となる例をいくつか素描しよう。

### 5.2.1　経済

人類の歴史の中で、経済の最も原始的な形態は物々交換である。対等な力関係にある人間同士の物々交換の原則は、自分にとって価値のあるものと相手にとって価値があるものとが、いくら対いくらで等価になるか、という評価をすることであろう。必要性、希少性、取引量を因子に入れて等価の関係を定量化するのであるから、数式で表現しなかったとしても、数学的な論理が働いていたに違いない。政治社会体制が生まれるとそれと共に数量を計算し、記録することがほぼ同時に始まった[84]。
さらに貨幣経済が発達すると、その価値の評価は貨幣に換算され、単位経済圏内では 1 次元尺度上で定量化されて、算盤上で取引がなされるようになる。それはやがて地球規模で制度化され、現在では貨幣価値の国際的統一化が、自由経済上のルールに則ってレートを定めることで実現している。数が経済について地球を一元化する道具となっている。
経済的価値が貨幣で表される「お金」として一元化された結果、自動車の生産が増えると自動的に鉄の生産が惹起されるというような関係も、金の動きの相互関連、つまり金額という数量についての連立方程式で表現できることになる。この関係を方程式で記述し、そこに含まれる様々の量に関する定数パラメータを操作することで、経済をコントロールしようという方法論も可能になる。線形方程式モデルを用いたいわゆる「近代経済学」は、それを道具としてある時期の経済政策を支配した。産業連関分析はこの数理モデルの上に存在している。
社会が制度化されて物の生産体系が整備されると、生産や交易に対する投資と利益回収という経済の仕組みが生じる。例えば気候・遭難・飢饉・戦禍といったリスクを考慮して投資の価値を評価することが必要になる。これに確率論的視点を導入すると、

83　何より、学校教育が「数が苦」でなく「数楽」でなければならない。
84　それは古代バビロニアの膨大な粘土板の記録などから知られる。

関係が数学の問題に帰着され、政策・施策が統計的決定問題になる。古い時代に現代数学的な意味で問題を定式化して解いていたかどうかは疑問であるが、現代では数学的視点・道具が産業政策の決定に用いられている。

経済では、生産と流通が価値を産むとするのが原則であるが、貨幣経済は、直接には生産と流通に関わらないで金が金を増やす（あるいは減らす）という仕組みも作り出した。その一方の極は一定金利の貸し金や預金であり、他方の極は損得を完全に自己責任で処理する株の売買や先物買いである。預金と融資は資本主義社会において近代的金融業に任されることとされていたが、近年そのリスクを一般の人に担わせる仕組みが登場してきている。投資信託・ファンドといったものである。預金より利息が多い可能性がある代わりにリスクもある、という条件で用意されている金融商品である。

数学の問題として考えると、高利貸しやサラ金での金額の変化は単純な複利計算ですむが、金融商品ではこれに確率が絡んでくる。金融商品のリスクベネフィットは、例えば、温暖化が猛暑を発生させてビールが売れ、$CO_2$ 規制が国際的に強化されてハイブリッド車が売れる一方で、バイオエタノール生産で食品が高騰するというリスクが生じる。この関係を確率微分方程式にモデル化すると数学的な解が確率過程として得られる。金融商品にはこのような数学的解を参考にしたものが少なくない。実際には、自然環境の変動や政治的決定の不確定性などの因子を間違いなく方程式に取り入れるのが難しく、数学に頼り切ることはできないが、それを無視することもできないのが現状である。個人の財産を個人で管理する時代が来たのであるから、金融商品を設計する専門家でなくても、その特性を概念的に理解しておき、盲目的にだまされないようにしておくことが個々人にとって必要なこととなる。

### 5.2.2　国勢

社会が制度化されて為政者が出現したとき、彼らは、生産活動、経済活動、武力維持のための社会基盤整備に力を注いだ。そして土木建築技術、機械技術、冶金技術、天文観測技術などが発展したが、そこでは自然科学が応用されており、数学は当然その基礎として貢献していた。

これとは別に、方法論としての数量的評価を、人間社会の状況・法則性の把握に取り入れる動きが 17 世紀に顕在化した。死亡表を整理して人口動態の法則性を論じたグラントの研究、アイルランドとイングランドの社会状況を各種の数値指標で比較したペティの政治算術（political arithmetic）、国勢を「人口、土地、生産物、貨幣」で指標化して把握しようとしたアッヘンヴァルらの研究である。彼らの議論の特徴は、数量データに現れている社会の法則的傾向を自然法則として認識しようという方向性である。

これらの動きは、数学の体系化の進展で作られた概念や記号の導入へとすすみ、正規分布を取り入れた平均人思想、国勢把握のための標本調査の理論と標本誤差論、遺伝現象の数学的モデルの構築、ポアソン分布による事故統計の整理、などへと発展す

る。こうしていわゆる近代統計学が確立した。そしてやがては、数学の分野に問題を数多く提出することとなる。その結果作られたのが、たとえば、統計調査法の理論、成長曲線の理論、保険数学などである。

社会において有史以来不滅の、悲しむべき現象は戦争である。戦争では、それぞれの国の科学技術の水準と固有の文化（忠誠心、自己犠牲決意、愛国心）が勝敗を決めている。数学は、それらの背後で技術を発展させるという形での影響を与えていた。

第 2 次世界大戦では、このような間接的影響ではなく、数学がより直接的に戦争の勝敗に影響を与えるということが起こった。「作戦計画」（operation research; OR）と「統計的品質管理」（statistical quality control; SQC）である。OR は、数学者を含めた科学者が直接的に、最も効率の良い作戦を数学的に見出し、作戦の立案、実行に供したものである。そこで開発された数学的方法論は、戦後、企業の戦略に取り入れられ、経済効率の良い生産体系の構築をもたらしている。SQC は、互換性のある大量生産を可能にする品質生産を、統計学的視点と手法で効率化したものである。結果としてアメリカは、武器や兵站機器の故障の減少と修理の容易さを実現して、日本との間にあった物量格差を拡大し、日本の敗北を早める結果をもたらした。これを教訓にした日本は、戦後にこれらの技術を積極的に取り入れ、結果として世界的に定評のある日本製品の品質を作り込んでいる。

### 5.2.3 健康と環境

医学及び環境科学における自然科学的側面からの数学の寄与（次節参照）は当然のこととして、ここでは社会的側面における数学との関わりを素描する。

健康に関する社会現象で最も注目すべきことは、疫病の流行とそれに対する環境の影響である。これを把握するには、どのような環境で患者がどれだけ発生して、かつどのような症状経過を取るか、という計測が重要である。こうした定量的評価を行って報告を行った人として、ナイチンゲールが知られている。ナイチンゲールは、この定量的報告に基づいて『看護覚え書き』を執筆し、換気・病棟の清掃・手指の衛生・食べ物飲み物の注意・患者の観察の重要性を、説得力を持って説いている。19 世紀のこの時代にここで用いられている方法論は、社会的に肯定されていたようで、コッホの業績もその一環をなしている。現在医学の一分野として確立していう疫学の方法論はこの時代に端を発しており、流行現象や環境影響についての数学的モデル、とりわけ確率モデルが重要な役割を果たしている。

健康についての社会現象でもう一つ注目すべきことは、基準値という概念の導入である。人は、身体に関する計測量がある範囲に入っているとき、比較的安全に生存することができる。例えば、血圧が高すぎると脳出血の危険が大きくなり、太りすぎると心臓に異常が起こり易くなる。そこで血液検査値や身体計測値に、基準的な値の範囲を設け、それを外れているときには警告を行うというシステムができている。その際問題になるのは、基準値をどう設定するかである。現在採用されている方法は、異常が認められない人の集団についてなるべく多くの計測値をデータとして獲得し、性、

年齢などの共変量を調整するモデルを想定し、分布範囲を定めることである。これには例えばスプライン関数を用いたモデルや、ノンパラメトリック回帰といった手法が有用と考えられる。

20 世紀の環境問題の主役は環境汚染であった。それが解消したわけではないが、それより大きく地球規模に一斉に影響するということで、近年は環境問題の主役が地球温暖化問題になっている。問題の自然科学的側面はさておき、問題解決には社会の努力が必要ということで社会的側面も重要とされ、環境社会学やリスク学といった分野が作られ、そこには数学的な方法論が取り入れられている。たとえば、$CO_2$ 排出権を金で評価して国際間で取引することを許すとどれくらい地球温暖化を抑制できるかという試算や、被害の受け方の貧富格差の評価などがある。

### 5.2.4　文化

文化を「個人のあり方に関する精神的側面を主とした社会的慣習」としたときに、数学と直接的に関連する現代的トピックを幾つか例示しよう。

古典文献の著者を同定する問題は、文化史の中で重要であるが、それが現代社会に大きな影響を与えかねないものに、宗教文献の著者の問題がある。ある宗教の教祖が書いたとして信者が依拠している文献が実は破門された他者が書いたものだった、ということになると宗派が分裂する。この種の問題に解答を与えようという試みは、計量文献学で行われており、解答のための主要な道具は多変量解析法である。これは文章の特徴を計量して、多次元空間で筆者を同定しようという技法である。

日本舞踊を赤外線カメラで追尾して、繊細な動きの特徴抽出を行うという試みが、時系列解析、多変量解析、微分幾何学を利用して行われている。これが成功すれば、日本女性の繊細な動きを実現するロボットを設計することが可能になるかもしれない。

スポーツについても、定量的評価が年々精密化している。例えばプロのスポーツ選手の契約金を算定するのに、成績の数量的評価で計算式を用いるのが近年では常道になっている。単に、成績だけではなく、海外での集客力、関連グッズの売り上げ、テレビでの露出度、将来性、といったものが計算式に付加されている。

スポーツの観客の側では、たとえば新記録が、選手の訓練の仕方の向上の成果か、ウエアや靴の質の向上によるのか、といったことがスポーツの数理科学として論議される。これは統計学的には、最大値が発生する確率分布の問題で、それにいろいろな要因を取り入れたモデルが現実のデータに適合するか、という検討が数学的になされている。トーナメントではシード制がシード選手に有利であることが数学的に証明されている。これらはスポーツを見る側に多くの話題提供をしているという意味で文化に含められよう。

数学を生み出す源泉となった古くからの「実用的でない」ものに、賭、ゲーム、遊技などの娯楽がある。賭は確率論、ゲームはゲーム理論に問題を出し、そこからなんらかの解を得ている。特に確率論は、最も古く賭のルールを考えることから出発した。

囲碁将棋などでは、経験的に「良い手」すなわち「定石」が知られているが、それらを組み込んで計算させることにより、どんどん強いコンピュータ棋士が現れつつある。チェスではすでに人間と互角の勝負をするにまで至った。

競馬や宝くじなどの賭け事には、偶然要素を楽しむという娯楽要素が不可欠である。すなわち、参加者に利益をもたらすのではなく、一時の興奮を味わわせることの方が主要な目的である。競馬では、単、複、枠複、などのバラエティに富んだ選択肢が用意され、宝くじでは一番違いや組違いに賞金が出る、という工夫があるのはそのためである。その場合、どういうシステムを作るのが最適か、というのは数理計画法における数学の問題であるが、数学が必ずしも明確な解答を与えるわけではない。

## 5.3　数学と自然科学との関わり

### 5.3.1　歴史的考察

数学（ただし最も広い意味で）は最も古い文化のひとつとして、人類史上「文明」の成立とともに誕生した。その現れは大きく分けて 3 つの主要な分野がある。それらは１．経済活動における記録と計算、２．土地・建物などの測量・設計、３．農業活動のための暦に関わる天文観測である。これらを行うために、数を扱って計算を行い、図形を考察して量を測定するための技法が経験的に積み重ねられ、発達していった。この意味で数学の誕生はむしろ技術の進歩に伴うものであったと言えよう。その中で、計算のアルゴリズムあるいは様々の観測量の間の関係が数学的な公式あるいは自然科学的な法則として認識され、数学は「学問」としての歩みを始めることとなる。

この「学問」としての数学を確立したのは古代ギリシャ（正確には地中海文明と言った方がよい）であり、こうした法則性の意識化としての自然科学の誕生と分かちがたく結ばれている。すなわちこうした「法則」は数学の言葉で記述され、その理由の説明もまた数学的性質に基づいたのである。例えばターレスは周期性によって日食を予言し、相似形を用いて地球の大きさを計算した。

こうした自然学の流れの中で学問としての数学を意識化したのはピタゴラス学派で、彼らは「万物の根本原理は数のそれが第一のものである」として、数学を根本において自然を解釈しようとした。そこではさらに「算術、幾何、天文、音楽」という４分野が意識されている。このうち最初の 3 つは冒頭に挙げた数学の 3 つの起源に対応している[85]。ここで数学は自然学の「基礎」であった。現在の印欧語での「数学」の語（英語では mathematics）も彼らに由来するが、その元来の意味は「学ばれるべきもの」である[86]。

---

85 「音楽」は「和声学」であって、時間とともに有理比で変化していくという意味での「音楽」理論である。一方、第２章と比べるとき、そこでは音楽の代わりに「不確実量」が入っている。不確実量が学問的対象として数学に入ってくるのはようやく 17 世紀のパスカルからである。

86 この考え方は、中世の大学教養科目(リベラルアーツ)である「自由技芸」(artes liberales）7 科のうち数学系の 4 科(quadrivium)としてこれらが採用されたことに受け継がれている。

そして数学をひとつのトータルな学問体系としてまとめ上げたものはエウクレイデス（ユークリッド）の『原論』であった。ここで一連の「公理」「公準」といった諸前提から出発して、厳密な概念の定義と演繹的推論によって知識を体系付けるという、数学の学問的方法が確立するのである。そしてこれは数学だけではなく、あらゆる学問的な（正確には学問を記述する）方法論の重要なモデルとされて現在に至っている。

近代自然科学の確立において数学がその「言語」として採用されたのは決定的に重要な事実であったと言えよう。それはガリレオ・ガリレイの「自然という書物は幾何学の言葉で書かれている」という言葉に代表されるように当初から強く意識されていた。すなわち、自然の法則が数式を使って書かれ、その諸法則間の関係が幾何学の定理や論証を用いて説明された。すなわち自然科学を書き表し、その内容を深く考えるための「言語」として数学が自然言語以上にふさわしいとされたのである。

実際、近代自然科学の理論体系を確立した金字塔であるニュートンの『自然哲学の数学的原理（プリンキピア)』では、数学の概念を用いて数式で記述される幾つかの基本法則（いわゆる「ニュートンの法則」あるいは「万有引力の法則」等）に基づいて、論証を積み重ねて様々の力学法則（例えばケプラーの法則)、運動の記述を導いていくという、『原論』に倣った力学の記述方式が採用されている。

ここではさらに重要な科学史上の事実がある。すなわちニュートンらによる近代科学としての「力学」が、数学におけるライプニッツ、ニュートンらによる「微分積分学（無限小解析学)」と相互に影響を及ぼす形で成立したことである。ニュートン力学は、単に公理論的な体系の記述の仕方の範をユークリッドの『原論』に取っただけではなく、その推論において様々の幾何学の結果を用いた。しかしユークリッド幾何学という「静的な」手法では十分でなく、関数の変化の様子を調べる「動的な」手法としての微分積分学が力学を構築する過程と並行する形で構築・確立されたのである。

これは数学理論が科学理論の普遍的なモデルとしてその必要性が認識されることを契機として確立され、そしてその理論が直ちに科学理論に応用されるという数学と科学の相互作用の最初の典型的な例、そして今なお最も基本的で重要な例の 1 つとなった。これが重要であるのは、その後これを基礎とした両者の並行的な発展的交流がさらに深まったこと、一方で微分積分学は力学を越えたさらに広い科学分野への応用を持ったことの 2 点に、すなわちその接触が本質的なものであって単なる ad hoc なものではないという点にある。

以後数学と自然科学とは深い関わりを持ちつつ相互発展していくことになるが、その原理的な部分はこのニュートン力学と微分積分学との関係の例に典型的に現れていると言えよう。数学史・科学史としては豊かな興味ある話題がいくつもあるが、ここではこれ以上歴史的流れに沿う記述は行わない。ただその両者の相互関係は、ますます深まり、緊密なものとなって現代につながっており、それについては後に触れる。

その代わりに、こうした数学と科学との関係がなぜ生じ、そして重要であるのかを「原理的」に振り返ってみたい。この中で幾つかの歴史的話題を選択的に取り上げる

ことになる。

### 5.3.2　原理的考察

我々は「第 1 章　数学とは」のところで、数学の本質として 4 つの性質を挙げた。それらを参照しながら、科学との関係を原理的に考えてみよう。

（1）量の世界

科学においては、様々の量が現れる。すなわち「数」として表すことができ、そのことによって対象の性質をより正確に「法則」として言い表すことができ、しかもその性質が何に由来し、どのような影響を他に及ぼすかを説明することができる。科学が数学を用いる第 1 の理由はここにある。考えれば、これ程多くのことがらが「数」というただ一つの概念で表すことができるというのは実に不思議なことである。

このようにある考察対象を量として認識する、すなわちその性質を数として表すことを「数量化する」（quantify）といい、そのような性質を「定量的」（quantitative）性質と呼んで、「定性的」（qualitative）性質と区別する。両者の区別は排他的なものではなく、むしろ正確に言えば、定性的に表現されている性質を定量的に捉えることを「数量化する」と言うのであり、そこに科学的に重要な契機があるのである。すなわち「大きい」「強い」「重い」「濃い」「熱い」などの様々の性質の度合いを「数」として表現することになるが、それが可能だという事実自体がすでに科学理論の 1 つの結果なのである。

具体的な対象に対して数量化された性質を調べ、対応する値を求めることを「測定する」という。測定するための機器は測定器と呼ばれる。簡単なものは例えば物差しのように直接的に測ることができるが、多くの場合には、何らかの仕組みによって「長さ」「角度」などの基本的な量に変換を行うことで測定を行う。したがってそこにもすでに科学的な理論が必要になる。例えば、竿秤で重さが量れる根拠は、釣り合いの法則であり、バネばかりで重さが量れる根拠は、フックの法則である。

こうした「測定」においては、必ず「誤差」が伴う。実験で理論を推測したり、検証したりする場合に、このデータの誤差の扱いが重要になる。測定値が理論的に期待される値とずれたときにその違いが測定に伴う誤差なのか、理論の「正しさ」に関わるものなのかを判断しなければならないからである。測定に関わる誤差は、測定を行ったときに生じた誤差（測定誤差）と測定機器の信頼度に基づく誤差とがあり、前者については数学的に処理し、数値の信頼度を求める方法があるが、後者ではそこで用いられる科学理論・技術的方法が関わってくる。

20 世紀後半になって、数理科学が飛躍的に拡大した理由の 1 つは、コンピュータの発達によって膨大な数値データを処理することができるようになり、今まで不可能と思われていた諸性質を数量化して調べることが可能になったからである[87]。その代表的なものの 1 つは画像処理である。特に図形の中にある様々のパターンを認識する方

[87] しかもこの場合は離散的数値へと数量化するので「デジタル化」と呼ばれるのが普通である。

法が飛躍的に進歩しつつある。

（2）言葉としての数学

科学に現れた様々の量の性質あるいは関係は「法則」と呼ばれるが、それらの法則は数式によって表すことができる。例えばニュートン力学の第2法則は

$ma = f$ ($m$ は質量、$a$ は加速度、$f$ は力)

と書かれる。あるいはある量を別の量から定義する場合も数式が用いられる。例えば地震のマグニチュード $M$ は地震のエネルギー $E$ （単位ジュール）を用いて

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

と定義される[88]。

これによって、量の諸性質や関係が明瞭に言い表せるとともに、その正しさの検証が容易になる。

さらに様々の法則の間の関係は、数学的な論理によって結ばれることで明確になる。例えば、惑星の運動を記述するケプラーの法則は、ニュートンの基本法則の基礎の上に万有引力の法則から数学的推論によって導くことができる。

したがってもしも新しい現象が発見観測され、従来の理論と齟齬を生じた場合も、どこが問題になるかがはっきりする。例えば、相対性理論が生み出される契機の1つになったのは、光の速度がどのような方向に対しても不変で、したがって地球の「絶対的な」運動を測定できないというマイケルソン-モーレーの実験であるが、これは（やや不正確な言い方ではあるが）ニュートンの法則に抵触し、したがって実験結果が正しいならニュートンの法則は修正を要することを示している（次項参照）。

（3）普遍的なモデルの提供

数学は単に科学の法則を記述する「言葉」を与えるだけではなく、数学理論が法則を含む大きな理論の枠組みを与える。そのことによって、ある法則を具体例に適用した結果や、諸法則間の関連が、その数学理論から直接的にあるいはその応用として与えられ、あるいは計算される。

例えば、力学法則は、速度、加速度が位置の時間による関数の（1次、2次）微分であることから、微分方程式として書かれ、微分方程式の理論を用いて、これを解くことで実際の運動が定まり、あるいは厳密解が求まらないとしても、その近似解を求めたり、性質を調べることができる。

さらに科学の理論の多くは、幾つかの量が幾つかの数式で書かれる基本原理をみたす数理モデルの理論として定式化される。上に度々引いたニュートン力学は質点の力学として、最も簡明な形で書かれる。それより複雑なモデルとして、剛体の力学モデル、流体の力学モデルなどがある。これらでは運動が時間の関数として記述され、微分方程式の数学理論が運動の様子を調べるための強力な手段になる。

このような数理モデルを考えるためには、状況を単純化してそこで考える量の種類を限定し、あるいは対象を質点のように理想化することが必要になる。

---

88 ただし気象庁から発表される「マグニチュード」は観測値を用いて直接計算するのでこれとやや異なる。

数学は、最初から単純化され、理想化された世界を想定して、そこで理論を創り上げている。そこでは演繹的推論だけが唯一の「正しさ」の保証である。したがって、科学がある数理モデルを採用した場合、それから得られる数学的な帰結の正しさはそのまま保証される。時には数理モデルの解析から新しい科学的事実の存在が予言されることもある。例えば電磁波は19世紀半ばにマクスウェルによって存在が予測され、4半世紀後に実験で確証された。同じ頃海王星も、天王星の摂動からその存在と軌道が予想され、それに基づいた観測によって発見されている。逆にそれに合わない帰結が得られた場合には、もとの数理モデルの適用に問題があるということになる。

もう1つ数学理論の価値として、その豊かさ・有用さとともにある種の「美的」価値があり、これが数理モデルを考えるときに大事な指針を与えて、新たな理論を見出す原動力になっていることを指摘しておきたい。

先にマイケルソン-モーレーの実験がニュートン力学の「正しさ」に疑問符を付けたことを述べたが、これを解決するための指針は、力学と電磁気学との平行性であった。すなわち後者はローレンツ変換と呼ばれる対称性を持ち、これに従えば電磁波の速度は不変になって、マイケルソン-モーレーの実験（に当たる結果）と矛盾が生じない。アインシュタインはこの考察を推し進めて（理論的に）特殊相対性理論に想到している。

しかも数学の理論は特殊相対性理論とニュートン力学との関係をも明らかにする。すなわち特殊相対性理論で光の速度が無限大になったとすると、その極限としてニュートン力学が得られる。光の速度は通常の運動における速度に比べて非常に大きいので、ニュートン力学はよい「近似」理論を与えていることが分かるのである[89]。こうした状況を数学はすでに非ユークリッド幾何学とユークリッド幾何学との関係で知っていた。すなわち非ユークリッド幾何学は曲がり方（曲率）が一定の曲面上の幾何学として解釈されることが分かっていたが、この曲率が0になるとユークリッド幾何学が得られるのである[90]。

このように数学は自らの想像力によって発見した理論として科学に普遍的なモデルを提供するが、一方で科学における様々の発見が数学者の想像力を刺激して新たな理論を生み出し、あるいは科学において生じた様々の問題を解決するために新たな理論が開発される。例えば微分方程式の様々の理論はその多くが力学（波動力学、熱力学を含む）の具体的な問題に起因する微分方程式を探究することで得られたものである。

ではこの数理モデルをどのように定めるのか、あるいはそれをモデルとすることがどの程度妥当なものであるのかが大きな問題となる。この問題を探究する上で、統計的な手法・考え方は大きな役割を果たす。様々の条件がすでに数学的に定式化されて

89　豊かな内容を持つ理論は、そのまま成立しないことが分かったからといって、決して無価値なものにならない、というのは、人類文化の歴史における1つの大事な経験則である。

90　ただ非ユークリッド幾何学ではあらゆるパラメータ（曲率）が等しく存在可能であるのに、現実世界では一つの値（光の速度、あるいはプランク定数）が定まっている。この「宇宙定数」がなぜこのように定まるのかは、なお解けていない大きな謎である。

いる場合には、それを手がかりにモデルを考えていくことになるが、まず膨大なデータがあって、その中から法則性を見出さねばならない場合に、統計学はその標準的な扱い方を示し、またある数理モデルを想定した場合にそれがどの程度信頼できるものであるかを検証する方法を与える。これは特に経済学を中心とする社会科学において極めて重要な役割を果たしているが、自然科学においても医学、特に疫学で重要な手法になっている（cf.[5.2]）。さらに現在の環境問題を考えていく上でもその重要性はますます大きなものとなりつつある。

### 5.3.3 数学と科学との相互作用は 21 世紀も続く

上に述べてきたように、数学は諸科学の基礎としてその進歩を支え、一方、諸科学の発展から新たな問題を与えられ刺激を受けて数学は発展してきた。20 世紀冒頭には、相対性理論と量子力学の誕生があり、ここで数学の果たした役割は極めて大きい。特に 20 世紀半ば以降量子力学の数学的な基礎付けとして関数解析学が用いられるようになり（ワイル等による）、さらに量子的場の理論が無限次元対称性の表現論として代数学や幾何学をも巻き込む形で発展してきた。これに加えて、特に 20 世紀後半からコンピュータの発達とともに従来の理学、特に物理・化学分野（いわゆる「精密科学」）に加えて、より広い生命科学・工学系諸分野あるいは社会科学系諸分野とのつながりが強まっている。この故に近年は「数理科学」の用語が自然科学・社会科学をまたぐ数理的手法を中心的に用いる分野の名称として広く用いられるようになってきた。

これは数学側から言うと、まず確率論的方法が発展しより重要になっていることが特筆されよう。量子力学が物理量を（複素）確率変数として捉えることからも想を得て確率解析学が関数解析学の強力な方法論の一つとして確立され、さらにそれを応用したブラック-ショールズ理論は金融における代表的理論の一つになっている（cf.[5.2.1]）。確率解析学の基礎である伊藤理論はブラウン運動[91]の解析手法に基づく。分子の不規則な運動を解析する理論が数学を用いることで株価の予測に使えるというのが学問の面白いところである。

もう 1 つの大きな変化は、非線形解析学の発展である。従来の解析学は「線形化」がまずあって、非線形現象はそこからの「ずれ」という形での取り扱いだったのであるが、コンピュータシミュレーションの進歩などで全く新たな非線形特有の現象が見出され、研究されるようになった。ソリトン方程式理論はその代表的なものの一つである。そもそもある現象に何かフィードバックが含まれれば、多くの場合その変化は非線形たらざるを得ない。方法論はまだ ad hoc なものが多いが、応用範囲は限りなく広いので、今後ますます発展して行くであろう。

またコンピュータで多量のデータを処理するための数学的方法、特に離散数学の発展も著しい。高速なデータ処理、データ圧縮などの目的で開発された、離散フーリエ

[91] ブラウン運動の基礎理論はアインシュタインによって光量子仮説、特殊相対性理論と同じく 1905 年（奇跡の年）に提唱された。

解析はその典型例である。

この他現在発展しつつある数学のテーマで他分野への応用が著しいものを幾つか挙げよう。

（１）暗号理論　破りにくい暗号を設計するアルゴリズムとして整数論が有力であることが分かった。二重鍵暗号では整数の素因数分解というユークリッド以来の基本性質が用いられるが、楕円曲線暗号はずっと高度な数学を用いることになる。

（２）DNA 解読　一方で遺伝子の持つ（我々から見れば）「暗号」を解読することは現在最も重要な学問的課題の一つであるが、ここでも数学は大きな役割を果たすことが期待されている。実際例えば遺伝子組み換えの仕組みを解析するために位相幾何学における「結び目理論」の高度な結果が有効であることが分かっている。

（３）逆問題　例えば「太鼓の音を聞いてその形を推定する」というように、対象から出力される情報をえることで、対象の性質を同定しようという問題である。実はこの答は一般的には否で、こうした問題をうまく解くことには多くの困難を伴うが、医療でのコンピュータ・トモグラフィのように、現実に役立つ理論が得られている。

（４）巨大問題の固有値解析　数理モデルの特性を示す指標の代表に固有値とよばれるものがある。最近は数百万を上回るような構成要素をもつ問題に対して、望ましい特性をもつかどうか（特定の範囲の固有値があるかどうか）を、効率的に調べることが可能になり、いわゆるナノ・テクノロジーを支えている。

（５）ウエーブレット解析　振動・波動現象にはフーリエ解析が有力であったが、近年見いだされたウエーブレットという関数の系は、対象の局所的な特性までよく捉えられるので、広い応用が展開されている。

（６）折り紙工学　折り紙は、日本の伝統工作であったが、複雑な形状の完成品を、１枚の紙から巧妙な切口と折方で作り上げる特徴が注目され、例えば宇宙空間へ持ち込んでから展開することで、複雑なアンテナを組み立てることに応用するなど、新しい動きが始まっている。

21 世紀が終わる時には（ただし人類がそこまで生存し続ければの話であるが）数学もまた確実にその姿を変え、科学との新たな実りある関係が多数生まれていることであろう。

# 参考文献


[Freudenthal] Freudenthal, H., Mathematics as an Educational Task, D. Reidel, Dordrecht, 1973

[PISA2006]　『PISA2006 年調査　評価の枠組み』、ぎょうせい、2006

[Polya] Polya, G., How to Solve It, Princeton Univ. Press, Princetion NJ, 1945

[Schoenfeld] Schoenfeld, A.H., Learning to Think Mathematically : Problem Solving, Metacognition, and Sense-making in Mathematics, in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, 1992, 334-370

[SfAA] Rutherford, F. J.(Ed), Science for All Americans, Oxford Univ. Press, New York, 1990

[Weil] Weil, A., Lettre a Simone Weil, Oeuvres Scientifiques, Vol.1, Springer, New York, 1979, 244-255

［藤平］藤平芳紀、『視聴率の正しい使い方』、朝日新聞社、東京、2007

［細井 1］細井勉、『日本語と数理』、共立出版、東京、1985

［細井 2］細井勉、『数学とことばの迷い路』、日本評論社、1992

［細井 3］細井勉（研究代表者）、『論理的思考力育成のための数学教育法の研究』、平成 11 年度～13 年度科学研究費補助金（基盤研究（C）（2））研究成果報告書、2002

## 数理科学専門部会名簿

| | | |
|---|---|---|
| 浪川　幸彦 | 名古屋大学　大学院多元数理科学研究科 | 教授 |
| 森田　康夫 | 東北大学　大学院理学研究科 | 教授 |
| 新井　紀子 | 国立情報学研究所　情報社会相関研究系 | 教授 |
| 石井　仁司 | 早稲田大学　教育・総合科学学術院 | 教授 |
| 上野　健爾 | 京都大学　大学院理学研究科 | 教授 |
| 岡本　和夫 | 東京大学　大学院数理科学研究科 | 教授 |
| 亀井　哲治郎 | 亀書房 | 代表 |
| 国宗　進 | 静岡大学　教育学部 | 教授 |
| 清水　美憲 | 筑波大学　大学院人間総合科学研究科 | 准教授 |
| 根上　生也 | 横浜国立大学　教育人間科学部 | 教授 |
| 藤木　明 | 大阪大学　大学院理学研究科 | 教授 |
| 真島　秀行 | お茶の水女子大学　大学院人間文化創成科学研究科 | 教授 |
| 三井　斌友 | 名古屋大学 | 名誉教授 |
| 吉村　功 | 東京理科大学　工学部 | 教授 |
| 米田　英一 | 元東芝システムインテグレーション | 開発部部長 |

### 「科学技術の智」プロジェクト　研究組織

平成 20 年 3 月現在

#### １．評議会

有馬朗人（日本科学技術振興財団会長）［議長］、赤田英博（日本ＰＴＡ全国協議会会長）、阿部博之（科学技術振興機構顧問）、石井紫郎（日本学術振興会学術システム研究センター副所長）、井上和子（神田外語大学名誉教授）、金澤一郎（日本学術会議会長・国際医療福祉大学大学院教授）、佐々木正峰（独立行政法人国立科学博物館館長）、鈴木晶子（京都大学大学院教育研究科教授）、遠山敦子（財団法人新国立劇場運営財団理事長）、中村日出夫（全国中学校理科教育研究会会長）、村上陽一郎（国際基督教大学大学院教授）、毛利　衛（日本科学未来館館長）

【以下、企画推進会議委員】

北原和夫（国際基督教大学教養学部理学研究科教授）、伊藤　卓（横浜国立大学名誉教授）、室伏きみ子（お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科教授）、長崎栄三（国立教育政策研究所教育課程研究センター総合研究官）、浪川幸彦（名古屋大学大学院多元数理科学研究科教授）、星　元紀（放送大学教授）、岩村　秀（日本大学大学院総合科学研究科教授）、筧　捷彦（早稲田大学理工学術院教授）、西田篤弘（元宇宙科学研究所／総合研究大学院大学理事）、長谷川寿一（東京大学大学院総合文化研究科教授）、丹羽冨士雄（政策研究大学院大学政策研究科教授）、渡辺政隆（科学技術政策研究所上席研究官）

#### ２．企画推進会議

北原和夫（国際基督教大学教養学部理学研究科教授）［委員長］、伊藤　卓（横浜国立大学名誉教授）［副委員長］、室伏きみ子（お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科教授）［副委員長］、長崎栄三（国立教育政策研究所教育課程研究センター総合研究官）［事務局長］、名取一好（国立教育政策研究所教育課程研究センター基礎研究部総括研究官）［事務局次長］、天野　徹（科学技術振興機構審議役）、有本建男（科学技術振興機構社会技術研究開発センター・センター長）、岩崎秀樹（広島大学大学院教育学研究科教授）、岩村　秀（日本大学大学院総合科学研究科教授）、小川正賢（神戸大学大学院人間発達環境学研究科教授）、小川義和（国立科学博物館展示・学習部学習課長）、荻野　博（放送大学副学長）、奥林康司（摂南大学経営情報学部教授）、筧　捷彦（早稲田大学理工学術院教授）、川勝　博（名城大学総合数理研究センター長）、熊野善介（静岡大学教育学部教授）、小林　興（帝京平成大学現代

ライフ学部教授）、小林傳司（大阪大学コミュニケーションデザインセンター　副センター長大学院教授）、佐々義子（NPO 法人くらしとバイオプラザ 21 主任研究員）、重松敬一（奈良教育大学副学長）、高安礼士（千葉県総合教育センターカリキュラム開発部部長）、高柳雄一（多摩六都科学館館長）、滝川洋二（東京大学教養学部社会連携寄付研究部門客員教授）、永山國昭（自然科学研究機構　岡崎統合バイオサイエンスセンター長）、浪川幸彦（名古屋大学大学院多元数理科学研究科教授）、西田篤弘（元宇宙科学研究所／総合研究大学院大学理事）、丹羽冨士雄（政策研究大学院大学政策研究科教授）、長谷川寿一（東京大学大学院総合文化研究科教授）、馬場錬成（東京理科大学専門職大学院教授）、古田ゆかり（フリーライター・サイエンス リテラシー プロデューサー）、星　元紀（放送大学教授）、堀裕和（山梨大学大学院医学工学総合研究部教授）、本田孔士（京都大学名誉教授）、美馬のゆり（公立はこだて未来大学教授）、吉田　浄（日本科学技術振興財団理事）、吉野輝雄（国際基督教大学教養学部理学研究科教授）、渡辺政隆（科学技術政策研究所上席研究官）

## ３．専門部会

### （１）数理科学専門部会

浪川幸彦（名古屋大学大学院多元数理科学研究科教授）［部会長］、森田康夫（東北大学大学院理学研究科教授）［副部会長］、新井紀子（国立情報学研究所情報社会相関研究系教授）、石井仁司（早稲田大学教育・総合科学学術院教授）、上野健爾（京都大学大学院理学研究科教授）、岡本和夫（東京大学大学院数理科学研究科教授）、亀井哲治郎（亀書房代表）、國宗　進（静岡大学教育学部教授）、清水美憲（筑波大学大学院人間総合科学研究科准教授）、根上生也（横浜国立大学教育人間科学部教授）、藤木明（大阪大学大学院理学研究科教授）、真島秀行（お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科教授）、三井斌友（名古屋大学名誉教授）、吉村　功（東京理科大学工学部教授）、米田英一（元東芝システムインテグレーション開発部部長）

### （２）生命科学専門部会

星　元紀（放送大学教授）［部会長］、浅野茂隆（早稲田大学理工学術院特任教授）［副部会長］、入來篤史（理化学研究所・脳科学総合研究センターグループディレクター）、唐木英明（東京大学名誉教授）、小林　興（帝京平成大学現代ライフ学部教授）、丹沢哲郎（静岡大学教育学部教授）、千葉和義（お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科教授）、本田孔士（京都大学名誉教授）、松本忠夫（放送大学教授）、室伏きみ子（お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科教授）、毛利秀雄（東京大学名誉教授）、渡辺政隆（科学技術政策研究所上席研究官）。［オブザーバー］加藤和人（京都大学大学院准教授）、長谷川眞理子（総合研究大学院大学教授）、和田正三（基礎生物学研究所特任教授）、青野由利（毎日新聞社論説委員　※平成 20 年 2 月まで）、

### （３）物質科学専門部会

岩村　秀（日本大学大学院総合科学研究科教授）［部会長］、藤原毅夫（東京大学大学総合教育研究センター特任教授）［副部会長］、池本　勲（東京都立大学名誉教授）、伊藤　卓（横浜国立大学名誉教授）、小倉　康（国立教育政策研究所教育課程研究センター基礎研究部総括研究官）、北原和夫（国際基督教大学教養学部理学研究科教授）、小林啓二（城西大学大学院理学研究科教授）、染宮昭義（(財)化学技術戦略推進機構常務理事）、辻　篤子（朝日新聞社論説委員）、中山　迅（宮崎大学教育文化学部教授）、花村栄一（千歳科学技術大学光科学部教授）、濱田嘉昭（放送大学教授）、三浦　登（東京大学名誉教授）、横山順一（東京大学大学院理学系研究科教授）、吉野輝雄（国際基督教大学教養学部理学研究科教授）、覧具博義（東京農工大学大学院共生科学技術院教授）

### （４）情報学専門部会

筧　捷彦（早稲田大学理工学術院教授）［部会長］、渡辺　治（東京工業大学大学院情報理工学研究科教授）［副部会長］、芦田昌也（和歌山大学経済学部准教授）、川合　慧（放送大学教授）、竹内郁雄（東京大学大学院情報理工学系研究科教授）、辰己丈夫（東京農工大学総合情報メディアセンター准教授）、西崎真也（東京工業大学大学院情報理工学研究科准教授）、萩谷昌己（東京大学大学院情報理工学系研究科教授）、原田悦子（法政大学社会学部教授）、藤田憲治（日経 BP 社編集長）、松井啓之（京都大学経営管理大学院/大学院経済学研究科准教授）、益子典文（岐阜大学総合情報メディアセンター教授）、吉見俊哉（東京大学大学院情報学環教授）

### （５）宇宙・地球・環境科学専門部会

西田篤弘（元宇宙科学研究所／総合研究大学院大学理事）［部会長］、唐牛　宏（国立天文台光赤外研究部教授）［副部会長］、縣　秀彦（国立天文台天文情報センター准教授）、池内　了（総合研究大学院大学教授）、磯﨑哲夫（広島大学大学院教育学研究科准教授）、糸魚川淳二（名古屋大学名誉教授）、大村善治（京都大学生存圏研究所教授）、上出洋介（京都大学生存圏研究所特任教授）、岸　道郎（北海道大学大学院水産科学研究院教授）、斉藤靖二（神奈川県立生命の星・地球博物館館長）、鳥海光弘（東京大学大学院新領域創成科学研究科教授）、廣田　勇（京都大学名誉教授）、保坂直紀（読売新聞東京本社科学部次長）、水谷　仁（株式会社ニュートンプレス社編集長）、渡部潤一（国立天文台天文情報センター准教授）

### （６）人間科学・社会科学専門部会

長谷川寿一（東京大学大学院総合文化研究科教授）［部会長］、辻　敬一郎（名古屋大学名誉教授）［副

部会長]、伊藤たかね（東京大学大学院総合文化研究科教授）、亀田達也（北海道大学大学院文学研究科教授）、木畑洋一（東京大学大学院総合文化研究科教授）、清水和巳（早稲田大学大学院経済学研究科准教授）、隅田　学（愛媛大学教育学部准教授）、利島　保（広島県立広島大学理事）、戸田山和久（名古屋大学大学院情報科学研究科教授）、二宮裕之（埼玉大学教育学部准教授）、長谷川眞理子（総合研究大学院大学教授）、早川信夫（日本放送協会解説委員）、廣野喜幸（東京大学大学院総合文化研究科准教授）、間田泰弘（広島国際学院大学工学部教授）、松沢哲郎（京都大学霊長類研究所教授）、松原　宏（東京大学大学院総合文化研究科教授）、松本三和夫（東京大学大学院人文社会系研究科教授）、山岸俊男（北海道大学大学院文学研究科教授）、山本眞鳥（法政大学経済学部教授）、渡辺政隆（科学技術政策研究所上席研究官）

### （７）技術専門部会

丹羽冨士雄(政策研究大学院大学政策研究科教授)［部会長］、小林信一（筑波大学大学院ビジネス科学研究科教授）［副部会長］、伊藤順司（(独）産業技術総合研究所理事／産業技術アーキテクト）、大河内信夫（千葉大学教育学部教授）、佐々木葉（早稲田大学理工学術院教授）、高安礼士（千葉県総合教育センターカリキュラム開発部部長）、田代英俊（(財）日本科学技術振興財団／科学技術館企画広報室次長）、中村正和（(株）日鉄技術情報センター特別研究員）、名取一好（国立教育政策研究所教育課程研究センター基礎研究部総括研究官）、谷島宣之（日経 BP 社編集委員）、山崎貞登（上越教育大学学校教育学部教授）、中川尚志（内閣府経済社会総合研究所研究官　※平成 19 年 3 月まで)。［オブザーバー］元村有希子（毎日新聞社科学環境部記者）、

## ４．広報部会

渡辺政隆（科学技術政策研究所上席研究官）［部会長］、小川義和（国立科学博物館展示・学習部学習課長）［副部会長］、縣　秀彦（国立天文台天文情報センター准教授）、亀井　修（国立科学博物館展示・学習部学習課ボランティア活動・人材育成推進室長）、木村政司（日本大学芸術学部教授）、野原佳代子（東京工業大学留学生センター准教授）、服田昌之（お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科准教授）、横山広美（東京大学理学系研究科准教授）

## ５．事務局

長崎栄三（国立教育政策研究所教育課程研究センター総合研究官）［事務局長］、名取一好（国立教育政策研究所教育課程研究センター基礎研究部総括研究官）［事務局次長］

【国立教育政策研究所】

小倉　康（国立教育政策研究所教育課程研究センター基礎研究部総括研究官）、鈴木康志（文部科学省初等中等教育局教科書調査官）、相馬一彦（北海道教育大学教育学部旭川校教授）、人見久城（宇都宮大学教育学部准教授）、阿部好貴（国立教育政策研究所研究協力者）、斉藤萌木（国立教育政策研究所研究協力者）、熊岡昌子（国立教育政策研究所研究補佐員）、国立教育政策研究所総務部

【日本学術会議】

信濃正範（日本学術会議事務局参事官）、廣田英樹（日本学術会議事務局参事官）、成瀬由紀（日本学術会議事務局参事官補佐）、佐野和子（日本学術会議事務局審議専門職）、関　浩子（日本学術会議事務局審議専門職）、生形直樹(日本学術会議事務局審議専門職付)、阿部左織（日本学術会議事務局審議専門職）

【国際基督教大学】

アンドリュー・ドモンドン（国際基督教大学非常勤講師）、原口るみ（国際基督教大学準研究員）、曽根朋子（国際基督教大学物理学教室）

## この報告書の利用について

この「報告書」を編集した「科学技術の智プロジェクト」では、「報告書」に書かれていることが、一人でも多くのひとたちにとっての共通の考え方、共通の知恵になっていくことを希望しています。そのために、「報告書」の著作権に関しては、次のとおり取り扱うこととしています。

記

**１．営利を目的としていない利用の場合**

・誰でも、「科学技術の智プロジェクト」のウェブサイトから「報告書」（の一部または全部）をダウンロードして記録媒体に保存し、またはプリントアウトして利用することができます。

・誰でも、「報告書」の（一部または全部の）コピー、送信、貸出し、無料配布、もしくは実費での有料配布などの方法による利用ができます。

・誰でも、「報告書」（の一部または全部）を変更、改変、加工、切除、部分利用、要約、翻訳、変形、脚色、もしくは翻案などを施して利用することができます。

・上記三つの利用をするに際して、「報告書」の著作権管理者の承諾を得る必要はありませんが、出所または出典として「科学技術の智プロジェクト報告書」と記載してください。

・上記の利用方法には例外があります。「報告書」には、第三者の著作物を「引用」として使用しています。引用部分については該当箇所にその表示があります。「報告書」としての利用ではなく、この引用部分のみの利用については、上記の利用方法の例外であり著作権法が定める著作権の制限規定にしたがうことになりますのでご留意ください。

**２．営利を目的とする利用の場合**

・「報告書」の著作権の管理は、「科学技術の智プロジェクト」の代表研究者である北原和夫が行っています。営利を目的として「報告書」を利用される場合には、北原和夫（国際基督教大学教養学部）にまでお問い合わせください。

・「引用」その他著作権法が定める著作権の制限規定にしたがって「報告書」を利用されるときには、もとより自由です。

以上

2008 年 6 月

科学技術の智プロジェクト

http://www.science-for-all.jp/

科学技術の智プロジェクト